





~~25-8-60~~

28726

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio ~~11~~

Palchetto

Num.° d'ordine 26

~~25-8-60~~



"R. Prov. II 1835

611100 SBN
PRINCIPII FONDAMENTALI

DELLA

TEORIA DELLE RESISTENZE DEI MATERIALI

CON

SUNTI DI DEFINIZIONI E PRINCIPII

OVVERO

MANUALE PRATICO

ED UTILI ESEMPII DI APPLICAZIONE

ALLE COSTRUZIONI ALL' ARCHITETTURA ED ALLE MACCHINE

per uso degli alunni della settima classe del Real Collegio Militare

esposti dall'Architetto

VINCENZO ANTONIO ROSSI

Professore di Meccanica Applicata al Real Collegio Militare : ex Professore di Costruzione e dell'Arte di progettare alla Scuola di Applicazione di Ponti e Strada, e di Algebra superiore all'abolita Reale Scuola Militare : Ingegnere di Acque e Strade al ritiro : Socio dell'Accademia Pontaniana, del Reale Istituto d'Incoraggiamento, della I. R. Accademia dei Georgofili, della Gioenia di Catania e della Economica di Terra di Lavoro.



NAPOLI

REALE TIPOGRAFIA MILITARE

1855.



Nel Real Collegio Militare, l'insegnamento della Meccanica ed Idraulica è diviso in due anni; e nel secondo, debbe insegnarsi alli Alunni della settima classe: la Teoria Generale delle macchine e dei motori: quella della trasformazione dei movimenti e della trasmissione delle forze: l'altra delle resistenze dei materiali: e quella dell'equilibrio delle fabbriche. Le quali abbracciano in gran parte le materie, che fanno oggetto di quel ramo della Meccanica, che ora v'è sotto il nome di meccanica applicata alle costruzioni ed alle macchine; od anche di meccanica industriale. Ma non l'abbracciano per intero.

Però, essendomi stato ordinato di scrivere un corso per quella classe, da comprendere certe date parti di quelle teorie, mi sembrava sconvenevole il pubblicarle insieme col titolo di Meccanica Applicata.

Ho preferito in vece scrivere separatamente su ciascuna di tali teorie; esponendone i principii fondamentali: ed ho cominciato da quelli delle resistenze; la cui esposizione forma l'oggetto del presente lavoro.

Nello scrivere ho avuto in mira:

1.° la chiarezza, massimamente per ciò che si riferisce ai ragionamenti meccanici, che nella teoria di che si tratta debbono quasi sempre prender lume dalle fisiche osservazioni: e ciò ho fatto, avendo riguardo all'organico attuale della scuola:



2.° il facile uso della teoria nelle applicazioni, senza mancare alla esposizione chiara dei principii, mostrando quando possono venir meno, e con quali cautele debbono applicarsi :

3.° l'oggetto della istruzione di quelli Alunni, che è di dover servire nelle nobili armi del Genio e dell'Artiglieria; epperò dovere prestare l'opera loro nelli arsenali, e nei migliori opificii del regno; per lo che è necessario abbiano i principii della teoria ridotti in fine a regole pratiche :

4.° che i più svelti e più solerti potessero alquanto spaziarsi più degli altri nelle conoscenze teoriche, così che aggiuntovi il corredo della pratica, da acquistare nei primi gradi di loro officio, potessero un giorno convivere con decoro il posto importantissimo di direttore del minuto in quelli stabilimenti, e più tardi di direttori in capo.

E per tali motivi ho adottato i pesi e le misure napoletane; persuadendomi che l'adottare quelle misure e quei pesi, dei quali s'ha una idea chiara e adeguata acquistata fin dalla infanzia, è un facilitare gli artefici e coloro che debbono dirigerli, introducendo così un linguaggio comune nelli Opificii, che debbe escluderne la confusione, dalla quale deriva talvolta la poco speditezza ed esattezza dei lavori, e quindi anche il maggiore dispendio per eseguirli. Ciò non ostante, in quanto ai coefficienti numerici, ho pure riportati quelli, che dovrebbero adottarsi, stando al sistema metrico francese. Così ho parimenti serviti coloro che credono dover fare uso di un tale sistema.

Se sono riuscito allo scopo non sò. Il fatto e l'esperienza nell'insegnamento il mostreranno: e prego tutti coloro che mi onorano della loro stimabile amicizia volermi dire al proposito la schietta loro opinione, e fornirmi

dei loro consigli, li quali avrò carissimi; e ne farò tesoro nella esposizione dei principii fondamentali delle altre teorie anzidette, e anche nel fare una nuova edizione di questa.

Ho cercato di dare al lavoro quel nesso ch'è requisito indispensabile delle matematiche discipline. Però ho fatto sempre dipendere ciascuna sua parte dalla precedente, e tutte da unico principio; ed ho cercato ad un tempo farne chiaramente discernere le ipotesi, giustificandone l'adozione, e mostrando fin quanto le formole od equazioni che ne dipendono sono fiduciali. Per tali riguardi, certe parti della teoria ho dovuto vederle sotto nuovo aspetto. E quali esse siano si fa chiaro di per se al lettore già istruito sul soggetto. Quindi non occorre io il dica.

In ogni capo, dopo esposta la teoria, ho detto come applicarla e con quali riguardi: ed ho detto per questo quanto di più importante è scritto nei più moderni lavori pratici sul soggetto: Dopo ho riassunte le definizioni, ed i principii, dando così il comodo alla pratica, di un Manuale sulla materia: e v'ho aggiunti utili esempi, li quali ho pienamente discussi, per mostrare sì come far uso di quella specie di Manuale, e sì come procedere da ingegnere, costruttore, ed architetto, anche nei casi dubbii. L'indice che segue meglio farà comprendere l'ordine tenuto e li esempi scelti. E da esso vedrassi che se il lavoro sembra soverchiamente voluminoso rispetto alla materia di che tratta, non lo è di fatto; mentre, ove si sopprimano tutti li esempi, e tutto ciò che può aversi come un vero manuale, sarà ridotto quasi a metà.

È risaputo che un lavoro della natura di che si tratta non può essere originale in tutto ciò che comprende: può esserlo in alcune sue parti, e nella esposizione. Dico dunque, una volta per sempre, che in tutto ciò

che non è mio, mi sono avvalso (e specialmente per ciò che si riferisce alla parte pratica) dei bei lavori di *Rondelet, Navier, Cavalieri, Poncelet, Morin, Barlow, Rennie, Glynn, Dempsey*, e della raccolta pratica che vedo in ogni anno la luce nella gran Bretagna, col titolo di *Engineer and contractor's Pocket Book*.

E mi piace sperare che l'opera corrisponda al buon volere.

Napoli Ottobre 1853.

Vincenzo Antonio Rossi.

INDICE.

NOZIONI GENERALI	pag. 1
----------------------------	--------

CAPO PRIMO.

Della resistenza assoluta positiva.	5
ART. I. <i>Caso in cui è messa a cemento l'ultima coesione, ovvero la rottura.</i>	6
ART. II. <i>Caso in cui è messa a cemento la elasticità</i>	11
ART. III. <i>Del come applicare le precedenti teorie e con quali riguardi</i>	15
ART. IV. <i>Si riepilogano le cose esposte e si applicano a degli esempi; ossia</i>	

MANUALE

<u>Definizioni.</u>	34
<u>Principii.</u>	35
MODULI DI ULTIMA COESIONE C in rotoli per oncia quadrata, limiti delle frazioni C' di essi moduli, e medii dei limiti medesimi.	
<u>Pei Legnami.</u>	19
<u>Pei Metalli.</u>	20
<u>Pelle Funi e Corregge.</u>	29
MODULI DI ULTIMA ADERENZA.	20
<u>FORZA DI PROVA pelle funi e catene</u>	25
<u>SFORZO PRODUCENTE LA ROTTURA nelle gomene e catene.</u>	26
<u>PESO CHE PUÒ SOSTENERE ogni centimetro quadrato, in kilogrammi</u>	31
<u>Es.° 1.° Sul torchio idraulico</u>	40
<u>Es.° 2.° Sulle piano dei tetti.</u>	41
<u>Es.° 3.° Sulla vite, e trincapalle</u>	43
<u>Es.° 4.° Sui perni della camera dispensatrice del vapore.</u>	44
<u>Es.° 5.° Sulle funi dei paranchi</u>	46

CAPO SECONDO.

	<i>Della resistenza assoluta negativa</i>	48
ART. I.	<i>Resistenza allo schiacciamento di pezzi di altezza prossimamente uguale alla minore dimensione trasversale del pezzo.</i>	51
ART. II.	<i>Della resistenza allo schiacciamento di pezzi lunghi, rispetto alla minore loro dimensione trasversale.</i>	55
ART. III.	<i>Dell'accorciamento di pezzi lunghi rispetto alla minore dimensione della loro sezione trasversale; ovvero del caso in cui n'è mess' a cimento la elasticità assoluta negativa</i>	57
ART. IV.	<i>Della flessione di pezzi lunghi rispetto alla minore dimensione della loro sezione trasversale</i>	59
ART. V.	<i>Con quali riguardi, e come applicarsi le teorie esposte nei quattro articoli precedenti</i>	64
ART. VI.	<i>Si riepilogano le cose esposte e si applicano a degli esempi; ovvero</i>	

MANUALE

Definizioni	73
Principii.	76
MODULI DI RESISTENZA ALLO SCHIACCIAMENTO S, <i>in rotoli per oncia quadrata, limiti delle frazioni S' di essi moduli; e medii dei limiti medesimi.</i>	
<i>Pei Marmi</i>	68
<i>Pelle Pietre dure</i>	69
<i>Pelle Pietre tenere.</i>	ivi
<i>Pei Legnami.</i>	70
<i>Pei Metalli</i>	71
PESO DI CUI PUÒ CARICARSI ogni centimetro quadrato in kilogrammi	74
<i>Es.º 1.º Sulle colonne architettoniche</i>	81
<i>Es.º 2.º Sulle palificate a castello</i>	84
<i>Es.º 3.º Sul torchio a vite</i>	85
<i>Es.º 4.º Sul gambo dello stantuffo delle marchine a vapore. . . .</i>	89

CAPO TERZO.

	<i>Della Resistenza Rispettiva</i>	92
ART. I.	<i>Caso in cui è mess' a cemento la resistenza alla flessione</i>	93
ART. II.	<i>Caso in cui è mess' a cemento la resistenza alla rottura</i>	122
	<i>Pezzi a Sezioni Identiche</i>	128
	<i>Pezzi di Uguale Resistenza</i>	132
ART. III.	<i>Del come applicare le precedenti teorie, e con quali riguardi.</i>	141
	<i>Calcolo dei Momenti di Elasticità e di Resistenza pei pezzi più generalmente in uso: importanti teoremi generali che ne derivano</i>	144
	<i>Ricerca dei Moduli di Elasticità e di Resistenza rispettiva</i>	166
ART. IV.	<i>Si riepilogano le cose esposte, e si applicano a degli esempj; ovvero</i>	

MANUALE

<i>Definizioni</i>	186
<i>Principii (simboli adottati)</i>	188
<i>Principii generali in ordine alla Flessione</i>	190
<i>Frece o centri di curvatura per pezzi di sezioni particolari</i>	194
<i>Principii Generali in ordine alla Rottura</i>	200
<i>Equazioni per determinare le dimensioni dei pezzi di sezioni particolari, onde le fibre di essi, le più tese e le più compresse, non lo siano oltre una data misura</i>	205
<i>Pezzi di ugual resistenza</i>	213
<i>MODULI DI ELASTICITÀ E in rotoli per ogni oncia quadrata</i>	
<i>Pei Legnami.</i>	175
<i>Pei Metalli</i>	175

<i>MODULI DI ELASTICITÀ in kilogrammi per ogni metro quadrato</i>	<i>176</i>
<i>MODULI DI RESISTENZA RISPETTIVA R, IN ROTOLI per once quadrate, limiti minimo e massimo delle sue frazioni R', e medio tra essi limiti</i>	
<i>Pei Legnami.</i>	<i>180</i>
<i>Pei Metalli</i>	<i>182</i>
<i>FRAZIONI R' del detto Modulo in kilogrammi per metro quadrato</i>	<i>183</i>
<i>Es.° 1.° Sulla distanza delle travi nei solai</i>	<i>217</i>
<i>Es.° 2.° Sui ponti a travate tubulari di ferro malleabile.</i>	<i>219</i>
<i>Es.° 3.° Sui ponti a travate di ferro fuso.</i>	<i>221</i>
<i>Es.° 4.° Sui ponti provvisorii militari</i>	<i>223</i>
<i>Es.° 5.° Sui bilancieri delle macchine a vapore</i>	<i>225</i>
<i>Es.° 6.° Sul vette dei maneggi, e la fatica meccanica dei cavalli perdutavi</i>	<i>228</i>

CAPO QUARTO.

<i>Della Resistenza alla Torsione.</i>	<i>231</i>
<i>ART. I. Caso in cui è mess'a cemento la elasticità di torsione</i>	<i>232</i>
<i>ART. II. Caso in cui è mess'a cemento la resistenza alla rottura per torsione</i>	<i>240</i>
<i>ART. III. Del come applicare le precedenti teorie, e con quali riguardi</i>	<i>243</i>
<i>ART. IV. Si riepilogano le cose esposte nei tre articoli precedenti, e si applicano a degli esempj; ovvero</i>	

MANUALE

<i>Definizioni</i>	<i>253</i>
<i>Principii (simboli adottati)</i>	<i>255</i>
<i>Principii generali in ordine alla elasticità di Torsione</i>	<i>256</i>
<i>Momenti di elasticità, angoli di torsione, e cammino dei punti di applicazione delle forze, pei pezzi di sezioni circolari e quadrate.</i>	<i>299</i>
<i>Principii relativi alla resistenza di torsione</i>	<i>261</i>

<i>MODULI DI ELASTICITÀ DI TORSIONE G' in rotoli per oncia quadrata</i>	<i>249</i>
<i>MODULI DI ELASTICITÀ' DI TORSIONE in kilogrammi per metro quadrato</i>	<i>253</i>
<i>MODULI DI RESISTENZA DI TORSIONE T in rotoli per oncia quadrata, limiti minimo e massimo delle sue frazioni T', e medii tra essi limiti .</i>	<i>251</i>
<i>Pei pezzi a sezioni rettangole.</i>	<i>252</i>
<i>Pei pezzi a sezioni circolari</i>	<i>252</i>
<i>MODULI DI RESISTENZA DI TORSIONE in kilogrammi, per metro quadrato.</i>	<i>253</i>
<i>RAPPORTI tra la Resistenza di torsione di diversi metalli</i>	<i>252</i>
<i>Es.° 1.° Sull' albero rotante della macchina a vapore.</i>	<i>262</i>
<i>Es.° 2.° Sull' albero rotante del maneggio</i>	<i>265</i>
<i>Es.° 3.° Sullo stesso soggetto, quando i cavalli camminano su piani diversi</i>	<i>267</i>

CAPO QUINTO.

<i>Della Resistenza composta.</i>	<i>269</i>
<i>ART. I.</i>	<i>269</i>
<i>ART. II. Si riepilogano le cose precedenti; ovvero</i>	

MANUALE.

<i>Definizioni</i>	<i>280</i>
<i>Principii</i>	<i>280</i>
<i>Es.° Sulla piane, ovvero catene dei grandi tetti, avendo ri- guardo al loro proprio peso.</i>	<i>281</i>

TAVOLA DI RIDUZIONE

delle

MISURE NAPOLITANE in MISURE FRANCESI.					MISURE FRANCESI in MISURE NAPOLITANE.				
	Palmi in decimetri, ovvero once in centimetri.	Palmi quadrati, in decime- tri quadrati, ovvero once quadrate, in centimetri quadrati.	Palmi cubici, in decimetri cubi, ovvero once cubiche, in centimetri cubi.	Rotoli in kilogrammi, ovvero trappesi in grammi.		Metro in palmi, ovvero decimetro in once.	Metro quadrato in palmi quadrati, ovvero decimetro quadrato in once quadrato.	Metro cubo in palmi cu- bici, ovvero decimetro cubo in once cubiche.	Kilogrammi in rotoli, ovvero grammi in trappesi
1	2,646	6,999	18,515	0,891	3,780	14,288	54,010	1,122	1
2	5,291	13,997	37,030	1,782	7,560	28,577	108,020	2,245	2
3	7,937	20,996	55,544	2,673	11,340	42,865	162,030	3,367	3
4	10,582	27,993	74,059	3,564	15,120	57,154	216,041	4,489	4
5	13,228	34,993	92,574	4,455	18,900	71,442	270,051	5,612	5
6	15,873	41,992	111,089	5,346	22,680	85,730	324,061	6,734	6
7	18,519	48,991	129,604	6,237	26,460	100,019	378,071	7,856	7
8	21,164	55,989	148,119	7,128	30,240	114,307	432,081	8,979	8
9	23,810	62,988	166,633	8,019	34,020	128,596	486,091	10,101	9
10	26,455	69,987	185,148	8,910	37,800	142,884	540,102	11,223	10



TEORIA DELLE RESISTENZE.



NOZIONI GENERALI

1. ELLE costruzioni sogliono esservi dei pezzi in varia guisa soggetti a pressioni, le quali trasmettono o sur altri pezzi o sul suolo; e nelle macchine le forze o pressioni applicate su certi organi, sono trasmesse per mezzo di verghe, funi, corregge, od altri organi, in altri luoghi, ove si opera il loro effetto finale.

Nella meccanica razionale, tali verghe od organi, o pezzi di resistenza si hanno come rigidi e d'invariabile forma, e le funi o corregge, come perfettamente flessibili; e però da non alterare punto le forze o pressioni da trasmettersi o da elidersi. Ma ciò non ha luogo in natura. O se possa considerarsi come aver luogo di fatto, ciò non si può che tra certi limiti dipendenti dalle dimensioni e qualità dei pezzi di resistenza o di trasmissione, in relazione colle pressioni che debbono trasmettere, od alle quali debbono resistere.

Quando una forza agisce su di un corpo, non quale si suppone nella meccanica razionale, cioè non perfettamente rigido, ma quale è di fatto, in sulle prime le fibre o molecole sue cedono all'azione di essa, e nel cedere sviluppano

certe resistenze , ovvero forze intrinseche , che crescono al crescere dell'alterazione di forma , ch'è l'effetto necessario di quel cedere. E può avvenire , che dopo una certa alterazione , le resistenze sviluppate equilibrano la forza , per modo che il corpo non più continui a variar di forma : e giunte le cose a questo punto , il pezzo o corpo potrà di poi aversi come rigido.

Ma dopo che una forza ha agita su di un pezzo per un certo tempo , quando cessa di agirvi , possono darsi due casi ; cioè o che il pezzo *ritorni compiutamente* alla sua forma primiera , o che *non vi torni in tutto*. Nel primo caso al nuovo agire della forza il pezzo svilupperà uguale resistenza di prima : e se sia un pezzo di trasmissione , nulla si troverà alterato , quando tornerà ad agire la forza : e dicesi avere il corpo *conservata la sua elasticità*. Nel secondo caso le cose varieranno : ed o che trattisi di costruzione , o che trattisi di macchina ; tanto la costruzione , quanto la macchina non si troveranno nello stato normale : e dicesi avere il corpo *perduta la sua elasticità*.

Potrebbe anche avvenire che agendo la forza sul corpo o sul pezzo , le fibre o molecole sue (e per la natura della materia di che è fatto e per le dimensioni) cedendo sempre più alla forza , non mai arrivassero a sviluppare una resistenza tale da equilibrare essa forza. In questo terzo caso il pezzo , sia di resistenza sia di trasmissione , andrà cambiando sempre più di forma , e potrà anche alla perfine rompersi , rendendosi così non più atto al suo scopo.

Ed è evidente che tanto meglio sarà fatta una costruzione , e tanto meglio una macchina , per quanto più le parti componenti di esse si troveranno stare nel primo dei tre casi enunciati ; ed anche impiegandovi la minima quantità di materia. Ed è evidente del pari , che onde ciò si verifichi , è necessario che i pezzi componenti le costruzioni , e li organi delle macchine , abbiano tali forme o dimensioni , che sottoposti ad esse pressioni o forze , sviluppino tali forze intrinseche o resistenze , da essere atte non solo ad equilibrare quelle pressioni , ma ancora da non perdere la elasti-

cità loro : ed anche da mettere questa a cimento nel minimo grado possibile.

2. Or la teorica che si prefigge la determinazione delle forme e dimensioni dei pezzi componenti le costruzioni o le macchine , in guisa che , o non cedano punto alle forze che su di esse agiscono , o cedano per tanto poco che al cessare dell'azione della forza ritornano allo stato primiero , dicesi *Teoria delle Resistenze* : teoria che nelle sue basi , e nelle sue applicazioni debbe prender lume dalle osservazioni e dall'esperienza.

3. Questa teoria ha ricevuti grandissimi sviluppi : e troppo lungo sarebbe il percorrerla tutta. Però ci contenteremo di esaminarne i principj fondamentali , con alcune delle più ovvie loro applicazioni.

4. Consideriamo un pezzo omogeneo , rettilineo e prismatico , *come ordinariamente ha luogo* nella pratica ; cioè tale che possa aversi , come generato dal piano della sua sezione trasversale moventesi parallelamente a se stesso , e sempre normalmente ad una retta interna , che può aversi come *asse del pezzo* : asse , che quando la sezione trasversale generatrice ha centro , è il luogo dei centri di tutte le sezioni.

Potranno darsi tre casi :

1.^o *Caso*. Che la direzione della forza agente sul pezzo , coincida col suo asse , e che o stenda , o prema il pezzo. In questo caso la resistenza del pezzo dicesi *assoluta* : e *positiva* se esso soggiace a *tensione* ; *negativa* se soggiace a *pressione*.

2.^o *Caso*. Che la direzione della forza che agisce sul pezzo sia normale al suo asse , l'incontri , e giaccia nel piano di una delle sezioni all'asse normali. In questo secondo caso la *resistenza* del pezzo dicesi *rispettiva*.

3.^o *Caso*. Che la direzione della forza che agisce sul pezzo sia perpendicolare al suo asse , non l'incontri , e giaccia nel piano di una delle sezioni all'asse normali. In questo terzo caso la resistenza del pezzo dicesi *resistenza alla torsione*.

Potrebbe anche la forza agire in un modo inclinato comunque all'asse del pezzo. In questo

4.^o Caso. La resistenza può dirsi *resistenza composta*; perciocchè è come se il pezzo fosse costretto a sviluppare ad un tempo più di una delle sorte di resistenza dette di sopra. E di fatto sia, a cagione di esempio, un pezzo (*fig. 1.*) prismatico AB invincibilmente poggiato ovvero fisso all'estremo B , ed all'altro estremo A agisca una forza F con direzione passante per l'asse del pezzo, ma inclinata ad esso medesimo asse. In questo caso potrà aversi la forza F come la risultante di due altre, l'una f normale all'asse del pezzo, e l'altra φ agente secondo l'asse medesimo. E la prima di queste forze mette a cimento la resistenza rispettiva del pezzo, la seconda φ la sua resistenza assoluta negativa. Onde veramente la forza F mette a cimento una resistenza composta dalle due rispettiva ed assoluta negativa.

5. Noi potremmo addirittura cominciare dalla considerazione della resistenza composta la più generale; e poi dedurre da essa i tre primi casi specificati di sopra. Ma così non faremo, e per non scostarci da ciò che generalmente è stato fatto dai diversi scrittori sulla materia, e per non potere, come abbiain detto (3), abbracciare tutta intera, ed in tutti li suoi sviluppi la teoria di che si tratta, e per volere solo esaminarne i principi fondamentali, e quei casi che sono più *immediatamente e speditamente* capaci di pratica applicazione.

Però nei capi seguenti parleremo

1.^o della resistenza assoluta positiva :

2.^o della resistenza assoluta negativa :

3.^o della resistenza rispettiva :

4.^o della resistenza alla torsione :

5.^o qualche cosa accenneremo sulla resistenza composta.

Ed in ciascuno, subito dopo la teoria diremo come applicarla e con quali riguardi; e quindi riepilogatine i principi ne daremo qualche utile esempio di pratica applicazione, e tali che li sviluppi e commenti. E distingueremo con caratteri più piccoli quelle cose, che possono serbarsi ad una seconda lettura, e delle quali ne contrassegneremo i numeri con un asterisco.

CAPO PRIMO.

DELLA RESISTENZA ASSOLUTA POSITIVA.

6. Se un corpo prismatico libero è sottoposto ad uno sforzo che il tira nella direzione del suo asse, le molecole o fibre sulle quali è applicata la forza agiscono sulle contigue, queste sulle altre che vengono appresso, e così di seguito; e per tal modo la forza agisce fin' anche sulle molecole poste all'estremo opposto del corpo; e questo obbedirà infine tutto intero alla forza, e metterassi in moto.

Ma non così se il pezzo è invincibilmente sostenuto dall'altro estremo, opposto a quello sul quale agisce la forza.

Qui, essendo il sostegno invincibile, la forza, traendo il pezzo, non potrà fare che tenderlo ed anche allungarne le fibre: e potrà od allungarle così che cessata l'azione della forza si rimettano nello stato primiero; od allungarle tanto, da vincerne la coesione delle parti componenti, epperò da schiantarne le fibre. Quindi due cose sono qui da esaminare:

1.° La rottura del pezzo: e dicesi allora mettersi a cimento l'*ultima coesione del pezzo*, od anche, come suol dirsi, la *resistenza assoluta positiva alla rottura*:

2.° L'allungamento del pezzo: e dicesi allora mettersi a cimento la *elasticità assoluta positiva del pezzo*. La quale dicesi *conservata* se il pezzo, non più sottoposto allo sforzo, ritorna alla primitiva lunghezza: dicesi *perduta* se, steso il pezzo, si rimane nella nuova lunghezza acquistata, comunque la forza non più agisca sur esso: ed *alterata* se, comunque non si rimanga nella nuova lunghezza acquistata, pure non ritorni proprio allo stato primiero.

Quindi negli articoli in che è diviso il presente Capo considereremo:

1.° il caso in cui è mess'a cimento l'ultima coesione, ovvero la rottura:

2.° il caso in cui n'è mess'a cimento l'elasticità, ovvero avremo riguardo all'allungamento del pezzo:

3.^o diremo con quali riguardi e come debbano applicarsi le precedenti teorie.

4.^o riepilogheremo, ed applicheremo a degli esempli le cose esposte.

ARTICOLO I.

Caso in cui è mess' a cimento l'ultima coesione, ossia la rottura.

7. Supponiamo aversi una verga di data sostanza, di sezione quadrata quanta una unità superficiale: per esempio di sezione un'oncia quadrata (la centesima parte del palmo quadrato); e supponiamo che sostenuta invincibilmente da un estremo, si vadano applicando all'altro estremo delle forze agenti secondo l'asse della verga, e successivamente ed insensibilmente crescenti. Si arriverà ad una forza (equivalente ad un peso C) che pure sarà sostenuta dalla verga; ma oltrepassata la quale, e per minima quantità, la verga si rompe. È evidente che C sarà pari all'*ultima coesione* della verga.

Or supponiamo che non s'abbia più quella verga di sezione un'oncia quadrata, ma che s'abbia un pezzo prismatico l'area della di cui sezione normale al suo asse sia A ; ovvero pari ad un numero A di quelle unità. Essendo il pezzo della stessa natura di quella verga, ed omogeneo, ogni unità della sua sezione avrà una forza C di ultima coesione. Onde essendo A le unità dell'aja della sua sezione, la forza totale di ultima coesione del pezzo sarà CA .

Dunque se s'abbia un pezzo di sezione A , e vogliasi la più gran forza F alla quale esso pezzo possa resistere senza schiantarsi, dovrà farsi

$$(I) \quad F=CA.$$

Nella quale equazione, C esprime quel peso equivalente alla più gran forza che può sostenere una verga di sezione un'oncia quadrata della medesima natura del pezzo che si considera, ed oltrepassando la quale quella verga si spezze-

rebbe. Questa quantità C dicesi coefficiente, od anche *modulo di ultima coesione*, o di *resistenza assoluta positiva alla rottura*.

Abbiasi a cagion di esempio un pezzo prismatico posto verticalmente, ed invincibilmente sostenuto dal capo superiore; e da basso ne penda un peso P . Se sia breve la lunghezza del pezzo, e tale che il suo proprio peso sia comparabilmente piccolissimo rispetto al peso P ; per vedere quale sezione debba avere il pezzo, perchè non si schianti sotto l'azione del peso P , basterà fare

$$(II) \quad P = CA.$$

Non così se il pezzo sia notevolmente lungo, cosicchè il peso suo sia comparabile al peso P .

8. In questo caso alla forza F bisognerà sostituire il peso P , più il peso della porzione del pezzo sottoposta a quella sua individuata sezione che si considera. Per fare questa sostituzione supponiamo (fig. 2.) che sia $S'S$ la sezione che vuolsi considerare del pezzo AB , dal di cui estremo A penda il peso P . Facendo

L = la lunghezza totale del pezzo,

x = la lunghezza del tratto AS ,

A = l'aja della sua sezione, e

p = il peso dell'unità cubica della materia di che è composto il pezzo, sarà pAx il peso della sua porzione $AS'S$; ed alla forza F bisognerà sostituire il peso $P + pAx$.

E la equazione (I) trasformerassi in

$$P + pAx = CA$$

onde

$$(III) \quad P = (C - px) A.$$

Onde al crescere di x , il peso P si farà sempre minore. Epperò, perchè il pezzo non si spezzi in nessun luogo, bisognerà assumere per x il più gran valore che può avere; e però porre in vece della x la L ; onde la equazione sarà

$$(IV) \quad P = (C - pL) A$$

dalla quale si determinerà il più gran peso P , che il pezzo di sezione A , e di lunghezza L , e di cui un' oncia cubica pesa p , può sostenere.

9. In questa ultima equazione facciamo $P = 0$; lo che vuol dire che dal pezzo AB non penda il peso P ; e che però il pezzo debbe sostenere solo il suo proprio peso. Verrà $pL = C$, e quindi

$$(V) \quad L = \frac{C}{p}.$$

Dunque un pezzo prismatico sospeso verticalmente, di qualunque materia sia, e di qualunque sezione, reggerà sempre se stesso, purchè la sua lunghezza non ecceda il rapporto del modulo di sua ultima coesione al peso della sua unità cubica.

* 10. Dalle equazioni (III) e (IV) abbiamo due valori del peso P , secondo che vogliamo considerare la sezione $S'S$ del pezzo e prescindere dalla sua parte superiore $BS'S$, o che vogliasi considerare il pezzo tutto intero, come è. Che se si voglia in vece, che resti costante il peso P per ambi i casi, dovrà in vece in esse equazioni (III) e (IV) avere A due valori diversi tra loro. E chiamando A_1 , A_2 i valori di A corrispondenti rispettivamente a ciascuno dei detti casi, sarà

$$A_1 = \frac{P}{C - px}$$

$$A_2 = \frac{P}{C - pL}.$$

E dovrebbe perciò per l'equilibrio essere $A_2 > A_1$.

Dunque facendo il pezzo AB prismatico, saravvi sciupio di materiale; perciocchè per tutta la sua lunghezza il pezzo AB avrà sezione maggiore del bisogno. E ne consegue che per aversi il pezzo *fatto colla minima materia* possibile, lo che è utile per la economia, dovrebbe essere sempre

$$P = (C - px)A$$

per tutti i valori di x , da $x = 0$ sino ad $x = L$. E ciò non può avverarsi che nel solo caso di A variabile.

Vediamo come debba variare A , perchè ciò abbia luogo: nel qual caso il pezzo dicesi di *ugual resistenza*, come quello che resiste egualmente in ogni sua sezione.

Dovendo essere variabile la sezione A , sarà essa una certa funzione della distanza x : e sia $\varphi(x)$ una tal funzione.

Pel tratto corrispondente alla derivata x' di x , potendo aversi come costante la funzione φ , il peso della porzione del pezzo compreso tra due sezioni consecutive, verrà espresso da

$$p x' \varphi(x);$$

ed il peso di tutta la porzione del pezzo, a cominciare da A sino ad una sezione qualunque $S'S$ corrispondente alla distanza x , sarà espresso da

$$\int_0^x p x' \varphi(x).$$

E quindi nella equazione (I), bisognerà porre

$$F = P + \int_0^x p x' \varphi(x), \text{ ed } A = \varphi(x)$$

otterremo quindi

$$(VI) \quad P + \int_0^x p x' \varphi(x) = C \varphi(x)$$

che derivata porge

$$p x' \varphi(x) = C x' \varphi'(x)$$

onde

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{p}{C}$$

e quindi integrando

$$(VII) \quad \log. \varphi(x) = \frac{p x}{C} + K.$$

Per determinare la costante K si consideri, che quando la x è zero, il pezzo riducendosi alla sezione estrema A , nella equazione (VI) la quantità $\int_0^x p x' \varphi(x)$ esprime il peso della porzione del pezzo sottoposta alla sezione che si considera, debb'essere pure zero; onde da quella equazione si ha

$$P = C \varphi(x_0)$$

onde

$$\varphi(x_0) = \frac{P}{C}$$

e perciò quando $x=0$, avremo dalla equazione (VII),

$$(VIII) \quad \log. \frac{P}{C} = K.$$

Quindi la funzione φ sarà data sottraendo la (VIII) dalla (VII).

E si avrà

$$\log. \frac{C}{P} \varphi(x) = \frac{p x}{C}$$

onde si ha

$$(IX) \quad \varphi(x) = \frac{P}{C} e^{\frac{p x}{C}}$$

Epperò, in generale, perchè un solido sospeso verticalmente e reggente un peso P sia di ugual resistenza, la sua sezione debb'essere

Teor. delle Res.

sere una funzione esponenziale della sua distanza verticale dall'estremità inferiore del pezzo; e quivi la sua sezione debb'essere uguale al rapporto del peso da sostenersi dal pezzo al modulo di ultima coesione della materia di che è composto il pezzo. E quest'ultima verità si fa manifesta ponendo nella (IX) $x=0$; perciocchè allora risulta

$$\varphi(x_0) = \frac{P}{C}.$$

* 11. Se il pezzo non dovesse sostenere che il proprio peso quest'infima sezione potrebb'essere zero. Ma è manifesto che a quest'ultimo limite non può mai arriversi nel fatto; perciocchè il punto o la linea è un concetto puramente razionale. Quando dunque il pezzo non debba sostenere alcun peso, potrà assumersi $\varphi(x_0)$ arbitraria, o meglio minima dipendentemente dalla materia, di che è composta il pezzo. Sia A l'arca di quest'infima sezione arbitraria. Sarà allora in generale

$$(X) \quad \varphi(x) = Ae^{\frac{px}{C}}.$$

* 12. Vogliasi ora che il pezzo sia di sezione rettangolare e con un lato costante. Chiamando a il lato costante ed y il lato variabile sarà

$$\varphi(x) = ay$$

e la equazione (IX) porgerà

$$(XI) \quad \frac{y}{2} = \frac{P}{2aC} e^{\frac{px}{C}}.$$

Che se si voglia che la sezione sia quadrata, dovrà essere $\varphi(x) = y^2$ e la medesima equazione darà

$$(XII) \quad \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{C}} e^{\frac{px}{2C}}.$$

E se infine si volesse che il pezzo fosse di sezione circolare, dovrà farsi $\varphi(x) = \frac{\pi}{4} y^2 = 0,7854 y^2$, e verrà

$$(XIII) \quad \frac{y}{2} = 0,564 \sqrt{\frac{P}{C}} e^{\frac{px}{2C}}.$$

Onde se vogliasi che un solido verticale pesante destinato a sostenere un peso, e di sezione orizzontale rettangola, quadrata, o circolare, sia di ugual resistenza, debbe così farsi che la sezione sua verticale per l'asse sia lateralmente terminata da una logaritmica.

E di fatto le tre equazioni disopra, come si sa dalle applicazioni dell'algebra alla geometria, sono per lo appunto quelle di una logaritmica.

Vedremo appresso, quando possa così convenire di conformare un pezzo, e come segnarsene nel modo più facile la sezione longitudinale.

ARTICOLO II.

Caso in cui è mess' a cimento la elasticità.

13. Supponiamo aversi una verga di una data sostanza di sezione quadrata, e quanta una unità superficiale: per esempio di sezione un' oncia quadrata (la centesima parte del palmo quadrato); e supponiamo, che sostenuta invincibilmente da un estremo, dall' altro estremo agisca una forza con direzione coincidente coll'asse della verga, e supponiamo che questa forza non sia capace di schiantarla: anzi che sia molto al di sotto di quella che ne mette a cimento l'ultima sua coesione (7).

Una tal forza, tendendo la verga, non potrà che allungarne le fibre, ovvero ogni minimo elemento longitudinale di essa: e quindi di una certa quantità allungare l'unità di sua lunghezza, che si costituisce di un certo numero di quelli elementi. Epperò l'effetto della forza sulla verga sarà di farne allungare ogni unità di sua lunghezza di una certa quantità.

Ma le forze si misurano dai loro effetti.

Dunque la forza agente sulla verga può misurarsi dall'allungamento di ciascuna sua unità di lunghezza.

Per esprimere algebricamente tal misura, facciamo

L = la lunghezza totale della verga, che abbiám detta di sezione un' oncia quadrata

l = l'allungamento totale di essa verga prodottovi dalla forza F

E_1 = il rapporto della forza F all'allungamento di ciascuna unità di lunghezza della verga.

Se l'effetto della forza sia *uniforme per tutta la lunghezza del pezzo*, la qual cosa può tenersi aver luogo quando l'allungamento è piccolissimo, avremo la proporzione

$L:l::1:$ all'allungamento dell'unità di lunghezza. Onde que-

sto sarà espresso da $\frac{l}{L}$; e quindi sarà

$$(XIV) \quad F = E_1 A \frac{l}{L}.$$

Ciò ha luogo avendosi la verga di sezione un'oncia quadrata. Se in vece si abbia un pezzo prismatico di qualunque sezione, sarà come se la forza F agisse sopra un fascio di verghe come la precedente, e contenenti insieme nella sezione loro trasversale tante unità per quante sono quelle contenute nella sezione trasversale del pezzo. Se sia dunque A la misura dell'aja di una tal sezione sarà in generale

$$(XV) \quad F = E_1 A \frac{l}{L}$$

della quale equazione conosceremo l'allungamento l di un pezzo lungo L e di sezione A , quando sur esso, e nel senso della lunghezza sua agisce una forza F . Ed è

$$(XVI) \quad l = \frac{FL}{E_1 A}.$$

14. La quantità costante E_1 dicesi *coefficiente* od anche *modulo di elasticità* dipendendo da essa l'allungamento l ; ed un corpo, dicendosi più o meno elastico secondo che sia atto ad allungarsi più o meno prima di perdere la facoltà di ritornare alla sua lunghezza primiera al cessare di agire la forza F che lo faceva allungare.

15. Si supponga il pezzo in posizione verticale e sostenente un peso P . Ove il peso del pezzo sia trascurabile rispetto al peso P , basterà sostituire ad F la P . E poichè nelle applicazioni quasi sempre ciò avviene, riterremo

$$(XVII) \quad P = E_1 A \frac{l}{L}.$$

* 16. Che se vonisse in mente a taluno di tenere in considerazione ancora il peso del pezzo sul quale agisce il peso P , è evidente non poter far egli uso di questa medesima formola; perciocchè allora ogni elemento longitudinale del pezzo essendo teso diversamente, l'allungamento da considerarsi non sarà più l'allungamento totale l , ma l'allungamento diverso di ciascuno elemento.

Per tener conto di queste cose, cominciamo in primo dall'osservare che il peso di ciascun elemento longitudinale del pezzo è

$$pAx'$$

essendo p il peso dell'unità cubica della materia di che è composta il pezzo, ed x' la lunghezza di un suo elemento longitudinale. Ed il peso che grava l'elemento longitudinale distante per x dall'estremo inferiore A del pezzo, sarà

$$\int_0^x p A x'.$$

E quindi nella (XVI) bisognerà porre

$$F = P + \int_0^x p A x'.$$

Epperò l'allungamento dell'elemento longitudinale x' del pezzo, distante da A per x , sarà espresso da

$$l' = \frac{(P + \int_0^x p A x') x'}{E_1 A}.$$

E se il solido fosse di ugual resistenza l'allungamento di quel medesimo elemento x' sarebbe (10)

$$(XVIII) \quad l' = \frac{(P + \int_0^x p x' \varphi(x')) x'}{E_1 \varphi(x)}$$

ove φ rappresenta (IX) la sezione trasversale variabile del pezzo. E trovando la primitiva di quest'ultima equazione avremo l'allungamento totale del pezzo. E sarà

$$(XIX) \quad l = \int_0^L \frac{(P + \int_0^x p x' \varphi(x')) x'}{E_1 \varphi(x)}.$$

Ma lasciamo stare di ciò, che può aversi come poco utile nelle applicazioni.

17. Passiamo a renderci ragione del significato della quantità E_1 , che è detta coefficiente, o meglio *modulo di elasticità*: ed a vedere fin dove possiamo aver fiducia nelle formole dei tre numeri precedenti.

Dalla (XIV) si ha

$$E_1 = F : \frac{l}{L}$$

onde verrebbe

$$F : \frac{l}{L} :: E_1 : 1.$$

Dunque se F è quella forza che fa allungare una verga lunga quanta l'unità lineare (13) e di sezione quanta l'unità superficiale di $\frac{l}{L}$, la quantità E_1 è quella forza che la farebbe allungare dell'unità intera cioè di tanto di quanto essa

è lunga: epperò la E_1 è un numero *meramente ideale*, ma che può dedursi dalle sperienze, ovvero dalle osservazioni in un modo indiretto, come diremo appresso; od anche si potrebbe direttamente per mezzo della (XVII)

$$P = E_1 A \cdot \frac{l}{L}.$$

Perciocchè da questa si ha

$$(XX) \quad E_1 = \frac{PL}{Al} = \frac{P}{A} : \frac{l}{L}.$$

18. Abbiassi ora un pezzo prismatico di sezione A , e siane posta a cimento la sua elasticità dalla forza F_1 . Si avrà (XV)

$$F_1 = E_1 A \frac{l_1}{L}$$

indicando con l_1 l'allungamento prodottovi dalla forza F_1 . Quindi sul medesimo pezzo non v'agisca la forza F_1 , ma in vece l'altra F_2 che vi produca l'allungamento l_2 . Si avrà

$$F_2 = E_1 A \frac{l_2}{L}.$$

Dalle quali due ultime equazioni risulta la proporzione

$$F_1 : l_1 :: F_2 : l_2.$$

Dunque *potremo avere fiducia nelle formole precedenti*, relative alli allungamenti dei pezzi, sempre che questi si verificchino tali nel fatto, che per una forza doppia s'abbia un allungamento doppio, per una forza tripla un allungamento triplo, e così di seguito. La qual cosa, in vero, come risulta dal fatto e dalle osservazioni, *non ha sempre luogo*. Ed in effetti da sperienze eseguite in grande in Piomburgo sembrò che verghe di ferro di ottima qualità, quando sottoposte a forze che oltrepassavano i due terzi di quelle che ne mettevano a cimento l'ultima coesione, al crescere di esse forze in progressione aritmetica, li allungamenti crescevano in progressione geometrica: cosicchè allora in vece della proporzione precedente, si avrebbe l'altra

$$F_1 : l_1 :: n F_1 : l_1^n.$$

In generale deve ritenersi che quando su dei corpi o verghe agiscono delle forze che li tendono, essi si tendono di fatto, e quindi si allungano; se questo allungamento è *piccolissimo*, se cioè, il rapporto $\frac{l}{L}$ è una *frazione piccolissi-*

ma, realmente una forza doppia vi produce un' allungamento doppio, una tripla un' allungamento triplo, e così di seguito; ma *per poco* che quella frazione va crescendo, questa proporzionalità *non ha più luogo*, li allungamenti non sono più proporzionali alle forze; e quando queste si avvicinano a quelle che ne metterebbero a cimento l'ultima coesione, li allungamenti seguono ragioni irregolari alla forza, nè sempre il pezzo o corpo conserva inalterata la sua sezione primitiva: ed in oltre l'effetto della forza, ch'è l'allungamento, *non è veramente uniforme*, come abbiamo supposto innanzi (13), per tutta la lunghezza del corpo.

Dunque le formole o regole riportate innanzi, relative al caso in cui è messa a cimento la elasticità assoluta positiva del pezzo, *sono fiduciali* fintantochè li allungamenti prodotti *sono piccolissimi*: cioè fintantochè si è *molto lungi* dal caso in cui metterebbesi a cimento l'ultima coesione del pezzo.

ARTICOLO III.

*Del come applicare le precedenti teorie,
e con quali riguardi.*

19. Le precedenti cose esposte non possono applicarsi, che sostituendo, per ciascun caso particolare, i numeri corrispondenti ai simboli componenti le formole innanzi trovate. Ma per tali sostituzioni è necessario tenere in considerazione, cose, che dipendono in tutto dalla natura fisica dei corpi, ed anche dall'ufficio cui sono destinati i pezzi od organi da essi fatti.

20. In quanto alle formole relative alla rottura, per farne uso, è necessario anzi tutto conoscere il valore del modulo *C* di ultima coesione. E questo valore può ottimamente cavarsi da sperimenti, come realmente è stato fatto. Si sottopone una verga della materia che vuole sperimentarsi a successive forze di trazioni, cosicchè la sua tensione vada sempre crescendo: ed esse forze si vanno aumentando per gradi *quasi insensibili*. Quella, che aumentata per poco, rompe la verga, ne misura l'ultima coesione. E così se

sia α la sezione della verga e φ la forza che ne misura l'ultima coesione sarà

$$\varphi = \alpha C$$

e da questa caverassi il valore

$$C = \frac{\varphi}{\alpha}$$

del coefficiente o modulo di ultima coesione.

E così da molti esperimenti fatti s'è cavato il valore medio di C per diverse sostanze.

Ma nelli esperimenti da fare per la determinazione dei valori di C bisogna por mente al modo col quale va fatta agire la forza sul pezzo che si sottopone all'esperimento.

Molti materiali sono fibrosi, e le fibre vi sono quasi parallele tra loro: e questa tessitura fibrosa si fa manifesta soprattutto nella più gran parte dei legnami. Or la direzione della forza debb'essere coincidente colla direzione delle fibre: queste dovendo essere parallele all'asse del pezzo prismatico. Perciocchè in questo caso solo mettesi a cimento ciò ch'è detto *ultima coesione*: Quando la direzione della forza fosse in vece normale ad essa direzione delle fibre, allora mettesi a cimento l'*aderenza delle fibre*: aderenza che in certe sostanze è debolissima.

Se i materiali sono cristallini e di tessitura granellosa, allora l'aderenza e la coesione, quasi mescondosi insieme, non è uopo fare le dette distinzioni nelli esperimenti.

Del resto, o che si sperimenti l'ultima coesione C , o l'aderenza che diremo D , le formole trovate nell'art. primo si applicheranno ponendovi per C essi valori.

E noto il valore di C , può calcolarsi la forza alla quale può resistere un dato pezzo senza che si schianti; od in vece data la forza che deve agire su di un pezzo, può determinarsi quale debba esserne l'aja della sezione. La qual cosa si farà, risolvendo quelle equazioni rispetto ad F o P nel primo caso, e rispetto ad A nel secondo: e si farà uso della (I) o (II) se il peso del pezzo è trascurabile rispetto alla forza F , o della (IV) se il pezzo è verticale ed il suo peso non trascurabile rispetto al peso P che deve sostenere.

21. Così determinata, o la intensità della forza, o la sezione del pezzo, ne consegue, che quando analogamente sian fatte le cose, per poco che cresce la forza, il pezzo si schianta; o può schiantarsi ancora se la materia di che è fatto non è perfettamente simile a quella sperimentata per dedurne il valore di C , o non perfettamente dappertutto omogenea. E però stando proprio all'ultima coesione per C , non si sarebbe veramente sicuri che il pezzo non schianterebbesi. Ed è chiaro, che onde niun danno possa paventarsi, basta calcolare la forza F o la sezione A , sostituendo nelle equazioni, non il valore effettivo di C che corrisponde all'ultima coesione, ma una parte di esso valore.

Or questa parte suol farsi variare tra il decimo ed il terzo del valore totale; e ci acosteremo più al limite minimo che non al massimo, secondo che vogliasi maggiore o minore sicurezza, secondo che la materia di che è composto il pezzo sia di peggiore o migliore qualità, e meno o più omogenea, ed anche secondo che il pezzo debbe per un tempo più o meno lungamente continuato soggiacere all'azione di quelle individuate forze.

22. Determinata, nel modo anzidetto, la forza che può agire su di un corpo, o la sezione del pezzo (mettendo cioè nelle formole per C una frazione del suo valore totale), potremo avvalerci con fiducia ancora delle formole relative al caso in cui è messa a cimento la elasticità del pezzo.

Di fatto abbiám detto (18) che quelle formole non sono veramente fiduciali che quando l'allungamento del pezzo, o meglio il rapporto $\frac{l}{L}$ è piccolissimo; e le osservazioni hanno dimostrato che tale può aversi veramente l'allungamento, quando, o la forza agente sul pezzo, o la sezione sua è determinata appunto prendendo per C , non proprio il modulo di ultima coesione, ma coi detti (21) riguardi, una parte di esso che è tra il terzo ed il decimo. E dal fatto e dalle osservazioni si è conchiuso potersi avere che gli allungamenti si conservano proporzionali alle forze, fintantochè queste non eccedono i due terzi di quelle che ne metterebbero a ci-

mento l'ultima coesione; e le dette frazioni della C danno forze molto al di sotto di essi due terzi.

Parimenti, se le fibre di un corpo si allungano pochissimo per l'azione di una forza, e poi questa cessa di agire, le fibre ripigliano la loro lunghezza primiera; ma avviene talora, che non cessando subito di agire la forza, ed in vece agendo sul pezzo per un tempo molto prolungato, le fibre *si spossano nella elasticità loro*, e quindi non tornano davvero alla lunghezza primiera. E di qui la necessità, anche per questo riguardo, di sottoporre il corpo a forze più o meno grandi, secondo che per minore o maggior tempo continuo debbe andar soggetto ad essa forza; o viceversa essendo data la forza, fare la sezione del pezzo più o meno grande, secondo che il tempo continuo, durante il quale esso pezzo debbe soggiacere alla forza, è più o meno prolungato.

Per tutte le quali cose fin qui dette si dà la regola, che per applicare le formole trovate innanzi è uopo sostituire a C *una parte soltanto* del valore del coefficiente di ultima coesione, compresa tra il terzo ed il decimo: e *più vicina al terzo che non al decimo* se il materiale di che è composto il pezzo è di migliore qualità ed omogeneo, ed il pezzo debb'essere soggetto ad uno sforzo *continuato per più breve tempo*: e *più vicina al decimo che non al terzo* se la materia di che è composta il pezzo, è *meno perfetta ed omogenea*, e debb'essere soggetto ad uno sforzo *continuato per lungo tempo*.

E se si consideri che i legnami in generale, meno si accostano ad essere omogenei, laddove i metalli più sono vicini alla perfetta omogeneità, conchiuderemo che dal limite un decimo ci scosteremo meno, se dobbiamo usare legnami, e meno dal limite un terzo se dovremo usar metalli.

23. Intanto i valori del *modulo di ultima coesione*, pei diversi materiali, di cui si suol mettere a cimento la resistenza assoluta positiva, espresso in rotoli per ogni oncia quadrata di superficie della sezione, sono notati nelle due seguenti tavole; ed insieme i *limiti massimo e minimo* delle parti di esso, da sostituirsi per C nelle formole precedenti.

NUMERO progressivo del MATERIALE più resistente al fuoco testato.	NOME DEI DIVERSI LEGNAMI (per ordine alfabetico).	MODULO di ultima coesione in rotoli — C.	LIMITI de' valori di C		MEDIO tra i limiti.
			minimo	massimo	
28	Abete bianco	4783	478	1594	1000
26	Abete rosso	5246	524	1738	1100
16	Abete americano	6469	647	2156	1400
9	Acero	8090	809	2697	1700
19	Acaju, Mogano delle Honduras.	6289	629	2096	1300
30	Acaju, Mogano Spagnuolo .	4143	414	1381	890
2	Bosso	10353	1035	3451	2200
7	Castagno salvatico	8162	816	2720	1700
27	Castagno indiano, Ippocastano.	5168	517	1722	1100
23	Castagno Spagnuolo	5919	592	1973	1200
12	Cipresso piramidale	7894	789	2631	1700
20	Faggio	6116	612	2039	1300
8	Frassino	8102	810	2700	1700
1	Lancio, <i>Lance wood</i> (a) . .	12825	1282	4275	2700
23	Larice	5674	567	1891	1200
29	Noce	4473	447	1491	900
6	Olmo nostrale	8310	831	2770	1800
18	Olmo straniero	6302	630	2100	1300
25	Ontano	5316	531	1772	1600
15	Peonia	6768	677	2256	1400
10	Pino bianco	8043	804	2681	1700
32	Pioppo comune	3562	356	1187	700
31	Pioppo piramidale	3943	394	1100	800
24	Pioppo tremolo	5425	542	1808	1100
30	Platano occidentale	4327	432	1442	900
33	Platano orientale	3487	348	1162	700
17	Querce	6353	635	2117	1300
13	Querce ischia	7642	764	2547	1600
11	Querce indiana, <i>Teak wood</i> .	7917	791	2639	1700
21	Sicomoro	6028	603	2009	1300
5	Sorbo ciavardello	8836	883	2945	1900
14	Sorbo salvatico	6896	689	2299	1500
3	Tasso libo	9598	960	3199	2000
4	<i>Teak</i> Africano, o <i>Turtosa</i> . .	9317	931	3108	2000

(a) Questo legno, che abbiamo tradotto Lancio, sembra appartenere (secondo la opinione dell' egregio nostro Tenore) all' albero detto *Lansium* o *Lansium*, che nasce nelle isole di Giava, Macassar, Banda, e nella Cina e nelle Indie, descritto dal Rumphio, e che si riferisce alla *Cookia Punctata* di Linneo.

NUMERO progressivo del MATERIALE più usato al senso tecnico.	NOME DEI DIVERSI METALLI (per ordine alfabetico).	MODULO di ultima coesione in rotoli— f .	LIMITI dei valori di C'		MEDIO tra i limiti.
			minimo.	massimo.	
1	Acciajo fuso	73583	7358	24328	15900
2	Acciajo blistered.	72978	7297	24326	15800
3	Acciajo shear.	69953	6995	23318	15200
17	Bismuto fuso	1781	178	593	400
8	Ferro inglese a barre	30692	3069	10230	6700
6	Ferro di Russia a barre . . .	32594	3259	10865	7100
5	Ferro di Svezia a barre . . .	33623	3362	11875	7800
12	Ferro battuto di qualità media	12277	1227	4092	2700
4	Ferro filato	48543	4854	16181	10300
7	Ferro in lamine teso nel senso della laminatura	32047	3204	10682	6900
9	Ferro in lamine teso normal- mente alla laminatura	28591	2859	9530	6100
15	Ferro fuso.	9661	966	3220	2100
14	Ottone fuso	9848	984	3283	2200
18	Piombo fuso	999	99	333	200
11	Rame battuto.	18575	1857	6192	4100
13	Rame fuso.	10453	1045	3484	2300
16	Stagno fuso	2593	259	865	600
10	Metallo forte di cannone . .	19932	1993	6644	4400

24. Il modulo di aderenza per diverse sostanze, che dintoiamo con D è dato dalla tavola seguente, ove pure sono indicati i limiti massimo e minimo delle parti di D , ossia del valore di D' ed il medio tra essi limiti

LEGNAMI.	MODULO di ultima aderenza delle fibre— D .	LIMITI delle parti di essa aderenza D'		MEDIO tra i limiti.
		minimo	massimo	
Querce	1268	76	126	101
Pioppo	976	59	93	79
Larice il più compatto .	931	56	93	75
Larice il meno compatto.	531	32	53	43

25. Talora non è possibile far agire la forza su tutta la intera sezione del pezzo, ma solo sur una parte di essa. Che

s'abbia, a cagion di esempio, (*fig. 5.*) un pezzo $ABCD$; e la forza non possa agire su tutta la sezione AD , ma sulla parte Aa soltanto. Se la forza fosse molto grande potrebbe sconnettere le fibre $AabB$ dalle altre $abCD$; facendo scorrere le prime, come in un fascio, per sù le seconde. La resistenza che così offrirebbe il pezzo sarebbe di altra natura: e dicesi di *aderenza laterale*.

Questa resistenza fu trovata pel *tremolo* di rotoli 448 per oncia quadrata.

* 26. Fintanto che il peso totale del pezzo è piccolo comparativamente al valore delle forze che agiscono sur esso, lo che suole quasi sempre avverarsi, esso peso può trascurarsi; nè è uopo averlo in considerazione: anzi è meglio non tenerne conto; perciocchè non ne verrebbe che soverchio calcolo, senza rilevante vantaggio.

Se in vece il peso del pezzo fosse sì grande da non potersi dir piccolo in paragone della forza agente sur esso; potrebbe stimarsi cosa utile l'avervi riguardo. Ma allora bisognerà distinguere il caso in cui il pezzo è verticale da ogni altro.

Nel primo caso è messa a cimento la resistenza assoluta positiva, e debbe applicarsi la equazione (IV), come è detto di sopra (21).

In ogni altro caso è messa a cimento la resistenza composta, della quale parleremo appresso.

Ma abbiamo dimostrato (10), che essendo il pezzo molto pesante e verticale, evvi sciupo di materiale determinandosene la sezione per mezzo della (IV); e che per impiegarsi la minima materia, senza che ne manchi la resistenza, è necessario fare il pezzo di uguale resistenza.

Vediamo dunque, come, in conformità delle cose dette ai numeri 10, 11, 12 possa tracciarsi la sezione longitudinale per l'asse del pezzo, perchè questo riesca appunto di ugual resistenza

Nelle equazioni (XI, XII, e XIII) si ponga in luogo di x la lunghezza data L del pezzo, il valore della C desunto dalle Tavole colle avvertenze dette innanzi (22), ed il valore del peso P

di che debbe essere caricato il pezzo, e si calcoli la $\frac{y}{2}$ corrispon-

dente. Sarà il valore risultante di $\frac{y}{2}$ la semilarghezza superiore del pezzo, ovvero la più grande ordinata del perimetro della sua sezione per l'asse.

Si tirino (fig. 4.) due assi ortogouali AB , AC , si tagli su di AC ; la parte Ac , e dividasì la Ac in un certo numero di parti uguali che diremo n ed ogni una di esse parti risulti lunga λ cosicchè sia $\frac{y}{2} = Ac = n\lambda$; e pei punti di divisione 1, 2, 3, etc. c , si tirino le parallele ad AB .

Per determinare i punti di queste parallele che appartengono al perimetro che vuolsi tracciare, si ponga nelle (XI), (XII), (XIII) in vece di $\frac{y}{2}$ la $n\lambda$, e si risolvano rispetto ad x . Si avrà pel pezzo di sezione rettangola

$$x = \frac{C}{p} (\log. C + \log. 2n\lambda - \log. P)$$

pel pezzo di sezione quadrata

$$x = \frac{C}{p} (\log. 2C + 2 \log. n\lambda - \log. P)$$

pel pezzo di sezione circolare

$$x = \frac{C}{p} (\log. 1,77 C + 2 \log. n\lambda - \log. P)$$

Nelle quali formole i logaritmi sono Neperiani: e però facendo uso delle tavole Briggiane bisognerà poi moltiplicare i valori calcolati del secondo membro di queste equazioni per 2,30258, onde avere i veri valori di x .

Si calcolino queste formole pei particolari valori di C e p che dipendono dalla natura della materia, di a e di λ , che dipendono dalle dimensioni date del pezzo, e di P , peso da sostenere: saranno allora esse formole ridotte in numeri ed a contenere la sola n .

Quindi si ponga per n successivamente 1, 2, 3 etc. n ; e si avranno pei valori risultanti per la x le distanze dalla AC dei punti della curva da tracciare, giacenti rispettivamente sulla prima, seconda, terza etc. di esse parallele che passano pei punti 1, 2, 3.... c . Onde segnati essi punti, e menata per essi una linea, sarà questa la traccia del perimetro della sezione longitudinale del pezzo di ugual resistenza.

E questo è il modo da tenere, in generale, per tracciare la sezione longitudinale per l'asse di un pezzo di ugual resistenza. Ma è da osservare che nella pratica non sempre conviene far uso di tali pezzi, ma solo quando debbano farsi di certi particolari materiali.

* 27. Sì nelle costruzioni, come nelle macchine sono usati due sorte di materiali: cioè o dei *fibrosi*, o dei *granellosi*, ossia cristallini. Sono fibrosi i legnami, e tutt'i metalli tirati alla filiera, ovvero laminati. Le fibre dei legnami sono più apparenti e più distinte: sono come fascetti di sottili filamenti o fibre collegate tra loro da un certo glutine, per lo quale esse fibre aderiscono le une alle altre. Nei metalli queste fibre sono più esili, e più o meno strettamente connesse tra loro, secondo che ne sono diversi e più o meno perfetti i metodi di purificazione, e laminatura. Granellose o cristalline sono quasi tutte le materie fuse.

Ora il fatto dimostra, che quando quelle fibre non si continuano per tutta la lunghezza di un pezzo, e nel senso del suo asse, la resistenza scema: e scema notevolmente se le fibre sono meno esili e compatte, come è pei legnami, e massime per certe specie.

Di qui è che non mai conviene conformare i pezzi di legname, secondo solidi di ugual resistenza, perciocchè per così conformarli bisognerebbe tagliare esse fibre, che perciò non caminerebbero tutte ed integre parallelamente all'asse del pezzo, e fin dove va applicata la forza. E per le medesime ragioni non conviene così conformare i pezzi di metalli battuti ovvero tirati alla trafilatura, ammeno che la economia di materiali non sia per altri riguardi raccomandata: e pure quando ciò si voglia, il pezzo non si fa proprio secondo il profilo voluto dalla teoria, ma solo ad esso approssimantesi.

Però è da ritenere, che la teoria dei pezzi di ugual resistenza sottomessi a *sola forza di trazione*, non è veramente applicabile che a pezzi da farsi con metallo fuso: e proprio di ferro di getto; perciocchè di ferro e non d'altri metalli si sogliono fare i pezzi di grandi dimensioni: e grandi dimensioni bisogna che abbia un pezzo, per poterne il peso essere paragonabile alla forza che agisce sur esso (a).

(a) Nel pezzi composti di più pezzi può farsi in modo che un pezzo medio sostenente il peso, sia abbracciato da altri pezzi più corti, cosicchè dal punto di sospensione in giù il pezzo composto si vada *restagliando*. Ma in questo caso il pezzo medio va collegato alli altri per via di *perni* o *fascie*: e la sezione del medio va calcolata così da sostenere il peso, come se fosse lungo quanta è la sua parte sporgente dalli altri che l'abbracciano (V. N.º 28).

Ora pel ferro di getto (23) essendo $C=9661$ e la C' potendo variare da 966 a 3220, ed un pezzo di ugal resistenza dovendo continuamente sostenere se stesso, comunque la forza possa per breve tempo agirvi, facciamo nelle formole di sopra $C=2000$ numero prossimamente medio tra quelli due: il peso di un' oncia cubica di ferro di getto può aversi di 151 trappesi; dunque esprimendo le lunghezze L ed x in palmi, e le dimensioni trasversali in once, per cui vi risponde il detto valore di C , sarà $p=1,51$.

Sostituendo questi valori nelle formole precedenti avremo *pel ferro fuso, se di sezione rettangola*

$$n\lambda=0,00025\frac{P}{a}e^{0,0000733L}$$

$$x=305(3,30103+\text{Log}.2an\lambda-\text{Log}.P)$$

se di sezione quadrata

$$n\lambda=0,01127\sqrt{P}\cdot e^{0,0000378L}$$

$$x=305(3,60206+2\text{Log}.n\lambda-\text{Log}.P)$$

se di sezione circolare

$$n\lambda=0,01278\sqrt{P}\cdot e^{0,0000378L}$$

$$x=305(3,54900+2\text{Log}.n\lambda-\text{Log}.P)$$

ove i logaritmi sono Briggiani, e le x ed L sono date in palmi, mentre λ è data in once, ed il P debb' esser data in rotoli.

28. Talora i pezzi nelle costruzioni, ed anche nelle macchine, per l'uso cui sono destinati, debbono essere di tale natura e dimensioni da doversi formare per l'aggregato di più piccoli pezzi collegati tra loro. Quando è così, del pezzo composto sottoposto a forze che tendono a stirarlo, non è veramente mess'a cimento la resistenza sua assoluta; ma è messa a cimento propriamente la *resistenza di costruzione* del pezzo. E questa non sempre può dedursi dalle esposte teorie; essendo necessario perciò, più ordinariamente, fare delli appositi esperimenti su di essi, ed ove questi non possano farsi, è necessario tenere in considerazione le resistenze che oppongono ad essere slegati quei mezzi che si adoperano per comporre di più pezzi un solo: ed il criterio per temerne conto può trarre lume anche dalla teoria delle resistenze.

29. Nella categoria de' pezzi composti potrebbero comprendersi le catene, ed anche le funi, e le gomene di fili di ferro.

Ora ecco nelle due tavole seguenti i risultamenti di accurati esperimenti fatti nella gran bretagna, per la determinazione dei più gran pesi ch'esse possono sostenere. Sarà nella prudenza dell'ingegnere, secondo la diversa manifattura di esse funi, gomene, o catene prendere anche qui una certa frazione del peso tabulare. Ma in casi di rilevanza sarà sempre meglio sperimentarne proprio la resistenza alla rottura.

CIRCONFERENZA delle funi in palmi.	P E S O in rotoli di ogni carua di fune.	F O R Z A di prova in cantaja.	P E S O in rotoli della catena di ugual forza.
0,34	2,024	14,53	4,048
0,41	3,496	20,94	5,888
0,48	4,232	28,50	7,728
0,55	5,152	37,33	10,304
0,62	7,176	47,59	13,248
0,67	8,280	58,14	16,192
0,77	11,040	70,96	19,872
0,84	13,984	83,78	23,552
0,91	15,456	98,89	27,232
0,96	16,928	113,99	31,648
1,03	20,608	131,66	36,064
1,10	22,448	152,65	41,216
1,18	26,496	169,85	46,368
1,25	28,704	190,37	52,256
1,32	33,120	211,46	58,144
1,39	29,808	232,45	64,032
1,46	41,216	258,18	70,656
1,54	44,160	283,84	78,016

SFORZO producete la rottura in		MATERIALI.	DIMENSIONI		PESO di ogni		
tons.	cant.			I N inch palmi	fathoms in pounds.	cables in tons.	
1	11	{ gomene di ferro } catena di ferro	{ circonferenza } diametro	{ 1 2 $\frac{3}{4}$	{ 0,096 0,19 0,02	{ 0,12 1, 1 3, 0	{ 0,63 0,79 2, 21
8	91	{ gomene di ferro } catena di ferro	{ circonferenza } diametro	{ 2 5 $\frac{1}{2}$	{ 0,19 0,48 0,05	{ 2,10 6, 0 16, 0	{ 1,52 4, 42 11, 78
12	136	{ gomene di ferro } catena di ferro	{ circonferenza } diametro	{ $2\frac{1}{8}$ 7 $\frac{27}{32}$	{ 0,24 0,67 0,07	{ 4, 8 12, 3 27, 0	{ 3,37 8,99 19,88
16	182	{ gomene di ferro } catena di ferro	{ circonferenza } diametro	{ 3 8 $\frac{13}{16}$	{ 0,29 0,77 0,08	{ 6,12 14, 3 36, 0	{ 5,03 10,46 26,50
20	228	{ gomene di ferro } catena di ferro	{ circonferenza } diametro	{ $3\frac{1}{8}$ 9 $\frac{29}{16}$	{ 0,34 0,87 0,084	{ 9, 4 19, 6 46, 0	{ 6,84 14,30 30,87
24	273	{ gomene di ferro } catena di ferro	{ circonferenza } diametro	{ 4 10 $\frac{27}{8}$	{ 0,38 0,96 0,09	{ 12, 4 25, 0 53, 0	{ 9,04 18,41 39,02
30	342	{ gomene di ferro } catena di ferro	{ circonferenza } diametro	{ $4\frac{1}{2}$ 11 $1\frac{1}{16}$	{ 0,43 1,06 0,10	{ 16, 5 30, 0 62, 0	{ 11,78 22,00 43,65
36	410	{ gomene di ferro } catena di ferro	{ circonferenza } diametro	{ 5 $12\frac{1}{8}$ $1\frac{1}{8}$	{ 0,48 1,20 0,11	{ 22, 5 35,10 78, 0	{ 16,46 26,29 57,43
44	501	{ gomene di ferro } catena di ferro	{ circonferenza } diametro	{ $5\frac{1}{2}$ 14 $1\frac{3}{8}$	{ 0,53 1,34 0,13	{ 27, 0 41,10 96, 0	{ 19,88 30,71 70,68
54	615	{ gomene di ferro } catena di ferro	{ circonferenza } diametro	{ 6 15 $1\frac{7}{16}$	{ 0,58 1,44 0,14	{ 34,0 47,8 115,0	{ 25,03 34,60 84,67

NOTA — Si sono in questa tavola riportati i pesi e le dimensioni inglesi, perchè non manifatturandosi presso di noi nè catene nè gomene a fil ferro, potessero commettersi occorrendo più facilmente in Inghilterra. Le gomene a fil di ferro, qui sopra segnate, sono della manifattura A. Smith.

Nel ridurre in cantale lo sforzo produttore la rottura, abbiamo trascurate le rotelle, essendo ciò sempre più utile pella pratica.

Paragonando tra loro i numeri segnati nelle due tavole precedenti, relativi alle dimensioni delle funi, ed ai pesi da sostenere, sembra stare grande discrepanza. Ma è da avvertire che tra lo *sforzo producente la rottura*, e la *forza di prova* v'è gran differenza. Il peso equivalente al primo sforzo, è come quello che cimenta l'ultima coesione: il peso equivalente alla seconda forza, è quello che la fune, quando di buona qualità, potrebbe sostenere con sicurezza. Epperò vedesi qual frazione del modulo di ultima coesione v'è preso trattandosi di funi.

Nella gran Bretagna la marina Reale sottomette le catene ad una forza di prova, che starebbe alla forza producente la rottura, come 10:19. E pure v'è la regola di non sottomettersi esse catene che ad una forza *metà di quella di prova*; perciocchè non potrebbe punto paragonarsi questa alla forza viva colla quale le navi all'ancora strappano le gomene che ve le tengono attaccate. Nelle macchine destinate ad elevar pesi sono preferibili catene di piccol diametro, che non dovrebbe oltrepassare i nove centesimi di palmo, sì per meglio potersi adattare sui *tamburi*; e sì ancora, perchè il ferro di tali dimensioni, è più fibroso e meno cristallino nel centro.

In quanto alle funi, potendo variare grandemente la qualità della canape e la costruzione loro, debbe di necessità grandemente variarne la resistenza. Il signor Noirfontaine, ufficiale del genio di Francia, in occasione del ponte di funi costruito a Metz nel 1827, fece una serie di sperimenti; dalli quali risultava che soltanto la qualità diversa del canape può far variare di $\frac{2}{3}$ la resistenza delle funi di uguali dimensioni e di simili struttura: e dalle osservazioni fatte dal Duhamel potette conchiudersi che la resistenza varia ancora notevolmente secondo il vario numero dei capi componenti la fune e il vario torcimento di essi. Recenti sperimenti fatti nella gran Bretagna hanno dimostrato questo fatto in eminente grado. Così due gomene perfettamente della medesima struttura e diametro, ma l'una di canape detto in Inghilterra comune, e l'altra di canape di Pietroburgo, furon trovate avere le resistenze nel rapporto medio prossimamente di 7:8; e di quelle fatte coll'antico metodo a quelle fatte

col nuovo, prossimamente come 6:7, se lavorate a freddo, e come 6:9 se lavorate a caldo.

Nel farsi li diversi esperimenti potette osservarsi ancora, che la più parte delle funi o gomene, per *alcuni minuti* sostenevano pesi *senza cedere sensibilmente*, ma li quali poi le rompevano *quando ne erano sostenuti per più ore continuate*. Lo che vuol dire che le funi abbisognano di un certo tempo per tendersi, allungarsi; e quindi rompersi. Ed i pesi notati nella prima delle due tavole precedenti detti di prova, sono appunto quelli che possono essere sostenuti dalle funi per più ore senza che queste si rompino: e s' intende che con tanta maggior sicurezza possono esse medesime funi sostenere dei pesi minori di quelli notati nella tavola. Ed è bene che quando una fune debbe andar soggetta ad uno sforzo lungamente prolungato, si scelga così, da poter sostenere un peso di prova maggiore dello sforzo che debbe realmente sostenere: e può farsi, per la miglior sicurezza, che *questo sia la terza parte di quello*. E ciò è tanto più necessario, in quanto che le funi si *vanno spossando a misura che s' invecchiano*: e spesso debbono così calcolarsi le dimensioni delli organi delle macchine, da potere servire pei medesimi usi per più mesi ed anche anni.

30. È anche opinione di molti, potersi valutare la resistenza assoluta positiva delle funi per mezzo delle medesime equazioni (I) e (IV). E ritengono doversene assumere il modulo di ultima coesione, che nelle dette equazioni è espresso per C , pari ad un peso che può variare dai 5 ai 6 kilogrammi per millimetro quadrato dell' aja della sezione trasversale della fune, ossia dai 47 ai 55 cantaja per oncia quadrata: ed in realtà doversi far sostenere da esse sforzi *inferiori alla metà dei pesi notati di sopra*.

31. Sogliono talora le funi incatramarsi, per difenderle dall' umidità, ed anche, come alcuni *malamente han creduto*, per renderle più resistenti. Ma è stato costantemente osservato che al contrario tale operazione ne riduce grandemente la resistenza: e può ritenersi che la resistenza delle funi incatramate varia dai $\frac{2}{3}$ ai $\frac{1}{4}$ della resistenza delle medesime funi non incatramate, ovvero come si dicono *funi bianche*.

Fù anche sperimentato che inzuppando le funi di grasso,

pur ne diminuisce la resistenza senza perciò diventare più durevoli. E fu osservato del pari che le funi o gomene bagnate, pur scemano di resistenza, e questa scende anche al disotto di quelle incatramate. Può ritenersi per limite massimo della resistenza *delle bagnate i nove decimi* delle catramate.

32. Le funi sono di grandissimo uso : e sì come organi resistenti, dello che vediamo il più grand' uso fatto nella marina, che come organi di trasmissione, come vediamo farsi nella più gran parte delle macchine destinate ad elevare o trasportar pesi. Ed è perciò che su di esse ci siamo lungamente fermati.

Ma quando trattasi di trasmissioni a breve distanza suole meglio farsi uso di corregge ; le quali sono fatte di cuojo, e sogliono essere piate, od anche rotonde. La loro resistenza, o meglio modulo di ultima coesione, è ritenuta di un kilogrammo per ogni millimetro della sezione; ossia di circa rotola 785 per ogni oncia della sezione: e nella pratica *non debbono* farsi soggiacere a sforzo maggiore dell' $\frac{1}{4}$ di esso modulo.

33. Volendo dunque , anzi che ricorrere alle due tavole precedenti , servirci delle equazioni (I) e (IV) , pel calcolo delli sforzi da far sostenere alle funi, o delle dimensioni da dare ad esse, ci serviremo della tavola seguente : e così pure pelle corregge. Tavola che è desunta dalle cose dette nei tre numeri precedenti.

M A T E R I A L I.	MODULO di ultima coesione. <i>C</i>	LIMITI dei valori di <i>C'</i>		MEDIO dei valori di <i>C'</i>
		minimo	massimo	
Funi bianche di qualità superiori. .	5500	530	2750	1650
Funi bianche di qualità inferiori. .	4700	470	2350	1410
Funi incatramate di $\left\{ \begin{array}{l} \text{le più resistenti} \\ \text{qualità superiori} \end{array} \right.$ le meno resistenti	4125 3666	} 366	2060	1213
Funi incatramate di $\left\{ \begin{array}{l} \text{le più resistenti} \\ \text{qualità inferiori} \end{array} \right.$ le meno resistenti	3525 3133			
Funi bagnate di qua- $\left\{ \begin{array}{l} \text{le più resistenti} \\ \text{lità superiori} \end{array} \right.$ le meno resistenti	3712 3299	} 329	1854	1091
Funi bagnate di qua- $\left\{ \begin{array}{l} \text{le più resistenti} \\ \text{lità inferiori} \end{array} \right.$ le meno resistenti	3172 2819			
Corregge.	785	78	198	138

34. Li pezzi di legname sogliono collegarsi per via d'incastri, od anche di viti o chiodi. Ecco la forza necessaria per svellere alcune di esse viti dai legnami, secondo le esperienze del signor Bevaux.

Frassino secco	rotoli 402
Querce.	387
Acaciù.	392
Olmo	333
Sicomoro	422

Le viti avevano la lunghezza di once 1,92, il diametro del nucleo di once 0,14, il risalto di once 0,07; e le rivoluzioni del risalto nella lunghezza di un' oncia numero $12 \frac{1}{4}$.

Del qual peso, vuole il Morin si faccia sopportare solo il quinto; e vuole che ove il legname fosse di abete, non se gli faccia sopportare che soli rotoli 39.

* 35. Prima di andare oltre ci piace anche riportare qui, ritenendo le misure e pesi francesi, la tavola che il Morin riporta nel suo *Ajuto Memoria*, nella quale però non sono i moduli di ultima coesione, nè i limiti delle parti di essi moduli da sostituire nelle formole, ma solo ciò che egli dice *peso di cui può con sicurezza caricarsi ogni centimetro quadrato*: laddove s'è dimostrato non doversi assolutamente adottare un solo di essi pesi per ciascun materiale. Per far uso di questa tavola bisogna ricorrere alla formola

$$F=C'A$$

ove C' sarà il numero notato nella tavola, A l'area della sezione trasversale del pezzo misurato in centimetro quadrato; ed F è dato in kilogrammi.

M A T E R I A L I.		PESO in kilogr. per ogni centimetro.
Legnami	Quercia forte.	196
	Quercia debole	140
	Abete.	167
	Frassino.	240
	Faggio	160
	Bosso.	280
	Pero	138
Metalli	Pioppo	25
	Ferro battuto di piccoli saggi, e ferro filato di prima qualità.	1000
	Ferro battuto di ordinarie dimensioni.	650
	Ferro battuto di 2 once di lato in sù (6 centimetri)	400
	Grossa lamina nel senso della laminatura.	700
	Grossa lamina nel senso perpendicolare a quello della laminatura.. . . .	600
	Catena ordinaria di ferro.	2000
	Catena di gomene.	3000
	Ferro grigio di getto.	750
	Metallo da cannoni	125
	Rame battuto	123
	Rame fuso	66
	Ottone	62
	Stagno fuso.	16
	Piombo fuso.	6
Funi	Corda secca di canape	125
	Corda bagnata	82
	Fune incatramata	95
	Correggia di cuoio nero	25
Muramenti	Mattone durissimo.	2
	Pietra calcarea.	6
	Gesso.	0,40
	Smalto idraulico di 18 mesi, e di buo- na qualità	0,90
	Cemento ordinario di 18 mesi	0,30

* 36. Determinate, nel modo anzidetto, le dimensioni del pezzo, o dell'organo, di cui è mess' a cimento la resistenza assoluta positiva, o determinata in vece la forza alla quale può farsi soggiacere un dato pezzo, noi saremo certi che il pezzo reggerà non solo senza rompersi o spezzarsi, ma starà ancora senza perdere la sua elasticità.

Ma appunto per siffatta elasticità, se il pezzo servirà per trasmettere la forza ad esso applicata, non la trasmetterà integra dall'estremo ov'è applicata all'altro suo estremo, che quando s'è già allungato per quanto può esserlo dalla forza applicata sur esso. Però prima che una tale trasmissione di forza avrà effetto, una parte della sua *fatica meccanica* andrà perduta, ovvero non produrrà effetto utile; ma solo si spenderà ad allungare, ossia stendere l'organo di sua trasmissione.

Ma la fatica meccanica di una forza misurasi dal peso ad essa equivalente per lo spazio percorso dal punto di applicazione della forza valutato nella sua direzione. E qui lo spazio percorso dal punto di applicazione della forza, prima che non sia trasmessa all'altro estremo, è uguale appunto all'allungamento del pezzo.

Dunque la fatica della forza non producente effetto utile per questo riguardo è per lo appunto lF .

Quindi la necessità di avere nota la l , onde calcolare tale effetto perduto; perchè ove riuscisse troppo grande, si potesse o crescere la sezione del pezzo, o scemarne l'intensità della forza.

E questa è l'applicazione primiera delle formole riportate dal numero 13 al numero 16.

* 37. Ma per servirsene è necessario conoscere il valore di E_1 coefficiente ossia modulo di elasticità. E questo valore di E_1 potrebbe calcolarsi immediatamente dalla formola (XX)

$$E_1 = \frac{P}{A} : \frac{l}{L}$$

per via di opportuni esperimenti. Prendasi una verga della materia medesima di quella per la quale vuolsi conoscere il modulo E_1 : e vadasi sottoponendo a forze che tendano a stenderla: anzi che la stendano di fatto. Misurisi l'area A della sezione del pezzo in once, la sua lunghezza primitiva L , e la nuova lunghezza che ha fatta prendere al pezzo la forza che agisce sur esso, il di cui eccesso su di L , dà l . Posto nella formola di sopra per A, L , ed l i misurati numeri, e per P la forza corrispondente che v'ha agita, si avranno una serie di valori per la E_1 , di cui il medio espri-

merà il modulo di elasticità. Or di questi esperimenti diretti, o non ne sono stati fatti; o se stati fatti, s'è misurato solo l'allungamento l del pezzo, quando era tale il peso P , di che caricavasi, che il pezzo era vicino a rompersi, nel qual caso, come abbiám veduto (18) le ragioni delli allungamenti aberrando notevolmente dalle ragioni delle forze, non possono punto stare le formole precedenti. Però in tanta penuria di esperimenti diretti, si pone per E_1 non il modulo di elasticità assoluta, ma il modulo di elasticità relativa, come se essi due moduli fossero li stessi, comunque v' è ragion da credere che siano diversi; le quali cose dichiareremo nel capo terzo.

Non pertanto in questi ultimi tempi nella gran Bretagna s'è avuta bellissima opportunità per fare la più grandiosa osservazione diretta sul ferro malleabile. Nell'innalzare il tubo principale del famoso Ponte Britannia dell'enorme peso di 1800 tons pari a poco meno di cantaja 20519, le catene di sezione 9 once ed un quarto quadrato, si allungarono di un'oncia e 44 centesimi; e quindi al cessare di agire, ritornarono alla lunghezza primiera; cosicchè, se conoscessimo con esattezza la lunghezza delle catene che si allungarono di tanto, e quante ne lavoravano ad un tempo, potremmo da questo magnifico esperimento in grande dedurre, per mezzo della formola di sopra, il valore E_1 . Intanto è bene sapersi che gli inglesi ritengono pel ferro malleabile il rapporto $\frac{l}{L}=0,000096$; cosicchè ne viene $E_1=12\ 786\ 666$ rotoli per oncia quadrata della sezione.

Sul filo di ferro furono fatte osservazioni dirette in Francia: e si trovò per valore del rapporto $\frac{l}{L}$, pel filo n.° 18 $\frac{l}{L}=0,0000579$, e pel filo n.° 17, $\frac{l}{L}=0,0000536$ per ogni kilogr. per millimetro quadrato. Cosicchè, ridotto il tutto a pesi e misure napolitane, se ne ha pel valor medio, $E_1=14\ 076\ 845$.

Può farsi nella pratica

Pel ferro battuto $E_1=12\ 786\ 000$

Pel ferro filato $E_1=14\ 076\ 000$

38. Sia data una forza F continua costante, ed agisca all'estremità di un pezzo di sezione A , determinata convenientemente per le cose dette innanzi; e vogliasi sapere qual

Teor. delle Res.

parte della fatica meccanica di essa forza sarà spesa prima che non sia trasmessa all'estremo opposto del pezzo.

Abbiamo già per la (XVI)

$$l = \frac{FL}{E_1 A}$$

Dunque sarà

$$lF = \frac{1}{E_1} \cdot \frac{L}{A} F^2.$$

Dunque avremo la fatica meccanica spesa dalla forza prima di essere trasmessa, moltiplicando l'inverso del coefficiente della elasticità pel rapporto della lunghezza del pezzo all'aja della sua sezione, e pel quadrato della forza.

ARTICOLO IV.

Si riepilogano le cose esposte: e si applicano a degli esempi.

39. Dalle cose esposte nei tre articoli precedenti si desumono le seguenti *Definizioni e Principii fondamentali relativi alla resistenza assoluta positiva.*

Definizioni.

1. *Resistenza Assoluta Positiva* di un pezzo è quella che il pezzo oppone ad una forza che agisce sur esso con direzione coincidente col suo asse, e che il distende. Qui la resistenza del pezzo ne uguaglia la *tensione*.

2. *Si mette a cimento l'ultima coesione* di un pezzo, quando è prossimo ad essere schiantato dalla forza che il *tende*.

3. *Si mette a cimento la elasticità assoluta positiva* di un pezzo, quando lungi dal potersi spezzare subisce solo un certo allungamento prodottovi dalla forza che agisce sur esso, con direzione coincidente col suo asse, e che il *tende*.

4. *È conservata la elasticità assoluta* di un pezzo, quando, cessando l'azione della forza, esso ritorna alla sua lunghezza primiera.

5. *È alterata la elasticità assoluta di un pezzo* quando, cessata l'azione della forza che v'ha prodotto un certo al-

lungamento tendendolo, esso non ritorna proprio alla sua lunghezza primiera.

6. È perduta la elasticità assoluta di un pezzo, se cessata l'azione della forza, quasi non si accorcia di nuovo.

7. *Modulo di ultima coesione* è il più gran peso che può sostenere una verga verticale di sezione un'oncia quadrata senza spezzarsi.

Esprimesi con C ; ed i valori ne son dati nella colonna seconda delle tavole messe a pag. 19, 20, e 29: vi sono pure notati il terzo ed il decimo di essi valori.

8. *Pezzo o solido verticale di uguale resistenza*, è quello che resiste ugualmente in ogni sua sezione od al solo proprio peso, od a questo e ad un peso addizionale che debbe sostenere pel suo estremo inferiore.

9. *Coefficiente o Modulo di elasticità* è quel peso ideale che sarebbe capace di allungare una verga verticale da esso aggravata, di sezione un'oncia quadrata, e di tanto di quanto è la sua medesima lunghezza, posto che li allungamenti fossero uniformi per tutta la verga e sempre crescenti in proporzione dei pesi aggravanti.

È espresso da E_1 . I suoi valori pel ferro sono dati a pag. 33.

Principii.

Si noti che nelle formole od equazioni riportate appresso, è

F =forza agente sul pezzo

P =peso sostenuto dal pezzo,

p =peso di un'oncia cubica della materia di che è composta il pezzo,

C =coefficiente o modulo di ultima coesione,

C' =parte del precedente modulo, che può variare dal decimo al terzo,

E_1 =coefficiente, o modulo di elasticità,

L =lunghezza del pezzo in palmi,

A =area della sezione del pezzo in once quadrate,

l =allungamento del pezzo lungo L ,

* x =distanza di una sezione di un pezzo verticale di egual resistenza, dal suo estremo inferiore onde pende un peso,

$\varphi(x)$ ==sezione variabile di un pezzo verticale di ugual resistenza.
 λ ==parte aliquota della semilarghezza superiore della sezione per l'asse di un solido verticale di ugual resistenza,
 n ==numero delle parti ciascuna uguale λ in che è divisa essa semilarghezza superiore,
 $\log.$ ==simbolo dei logarithmi neperiani,
 e ==base di essi logarithmi,
 Log. ==simbolo dei logarithmi brigghiani.

1. La più gran forza, a cui senza schiantarsi, un pezzo prismatico di *piccol peso* rispetto alla forza, può reggere, è data in rotoli, dal prodotto dell'area della sezione del pezzo misurata in once, nel modulo di sua ultima coesione.

La formola è

$$F=CA.$$

N. B. In pratica non deve mai arrivarsi a questo limite. Si deve procurare non solo che il pezzo non sia prossimo a schiantarsi, ma che non perda di sua elasticità.

2. La più gran forza, a cui senza perdere di sua elasticità, un pezzo prismatico, di *piccol peso* rispetto alla forza, può reggere, è data in rotoli dal prodotto dell'aja della sezione in once quadrate, in un numero compreso tra il terzo ed il decimo del modulo di sua ultima coesione. E più vicino al terzo se la materia di che è composto il pezzo è di migliore qualità ed omogenea, e se l'azione della forza debb'essere continuata per breve tempo: e più vicino al decimo se la materia di che è composta il pezzo è meno perfetta ed omogenea, e se l'azione della forza debb'essere continuata per tempo molto prolungato. In oltre, a tutte altre cose pari, è uopo scostarsi meno dal limite un decimo se trattisi di legnami; meno dal limite un terzo se trattisi di metalli.

La formola è

$$F=C'A.$$

3. Il più gran peso, che senza spezzarsi, può sollevare un pezzo prismatico verticale, di peso comparabile al peso da sollevare, è dato dal prodotto della sezione in once quadrate, nel modulo di sua ultima coesione meno il peso del pezzo.

La formola è

$$P=A(C-10pL).$$

N. B. In pratica non deve arrivarsi a questo limite. È uopo che il pezzo non perda la sua elasticità.

4. Il più gran peso che senza perdere di sua elasticità, può sollevare un pezzo prismatico verticale, di peso comparabile al peso da sostenere, è dato dal prodotto della sezione del pezzo in once quadrate, in un numero compreso tra il terzo ed il decimo del coefficiente di sua ultima coesione diminuito del peso del pezzo.

E più vicino al terzo se la materia di che è composta il pezzo è di migliore qualità ed omogenea, ed il peso debbe tenersi sollevato per breve tempo: e più vicino al decimo se la materia di che è composta il pezzo è meno perfetta e meno omogenea, ed il peso debbe tenersi sollevato per tempo molto continuamente prolungato. In oltre, ad altre cose pari, è uopo scostarsi meno dal limite un decimo trattandosi di legnami, e meno dal limite un terzo trattandosi di metalli.

La formola è

$$P=A(C'-10pL).$$

5. Un pezzo prismatico, sospeso verticalmente, reggerà se stesso, se la sua lunghezza sarà minore del rapporto del modulo di sua ultima coesione, al peso dell'unità cubica della materia di che è composta il pezzo.

La formola è

$$L < \frac{C}{10p}.$$

N. B. In pratica non dovrebbe mai arrivarsi al limite massimo di $L = \frac{C}{10p}$. Il massimo può essere $L = \frac{C}{30p}$; ma si fa manifesto che difficilmente si arriverà a questo limite, considerando che il modulo C è ordinariamente molto grande rispetto al peso p di un' oncia cubica della materia di che si compone il pezzo.

* 6. Perchè un solido sospeso verticalmente e tenente sollevato un peso, sia di ugual resistenza, la sua sezione trasversale in ogni luogo, debb' essere una funzione esponenziale della sua di-

stanza dall'estremo inferiore del pezzo, ove la sezione debb'essere uguale al rapporto del peso da sostenere al coefficiente di ultima coesione.

La detta funzione è

$$\varphi(x) = \frac{P}{C} e^{\frac{px}{C}}$$

* 7. Un solido di *ugual resistenza* sospeso verticalmente, non è bene farsi di legname: conviene farsi di getto.

Se di metallo tirato o battuto conviene meglio accostarsi soltanto alle forme di un solido di *ugual resistenza*.

Quando il solido vuol farsi di ferro di getto, ossia fuso, la sezione longitudinale pel suo asse traccerassi per le equazioni seguenti:

se di sezione *rettangolo* per le due

$$n\lambda = 0,00025 \frac{P}{a} e^{0,0000733L}$$

$$x = 305(3,30103 + \text{Log. } 2an\lambda - \text{Log. } P)$$

se di sezione *quadrato* per le due

$$n\lambda = 0,01127 \sqrt{P} e^{0,0000378L}$$

$$x = 305(3,60206 + 2\text{Log. } n\lambda - \text{Log. } P)$$

se di sezione *circolare* per le due

$$n\lambda = 0,01278 \sqrt{P} e^{0,0000378L}$$

$$x = 305(3,54960 + 2\text{Log. } n\lambda - \text{Log. } P)$$

Calcolata la prima si conoscerà $n\lambda$: prese (fig. 4) due rette AB, AC ortogonoli, tagliata la $Ac = n\lambda$, e divisa la Ac in un numero n di parti uguali, si meneranno per ogni punto di divisione della Ac , le parallele alla AB . Nella seconda delle equazioni di sopra si porrà successivamente $n=1,=2,=3,=4$ etc., ed i valori risultanti per x si taglieranno successivamente sulle diverse parallele ad AB , a contare dalla AC , ed a partire dalla più prossima alla AB .

* 8. Se una forza mette a cimento la *elasticità assoluta positiva* di un pezzo prismatico di piccol peso rispetto alla forza, l'allungamento che per essa forza è prodotto nel pezzo, si misura dal prodotto del rapporto della forza al modulo di elasticità, nell'altro rapporto della lunghezza del pezzo all'aja della sua sezione.

La formola è

$$l = \frac{F}{E_1} \cdot \frac{L}{A}$$

N. B. Questa formola è fiduciale finchè l'allungamento del pezzo è piccolissimo: e ciò è quando il rapporto $\frac{l}{L}$ è una frazione piccolissima. Può aversi nella pratica essere ciò vero sempre che la F è determinata pel secondo principio.

* 9. Se una forza mette a cimento la elasticità assoluta positiva di un pezzo verticale di ugual resistenza, l'allungamento del solido può calcolarsi per la formola

$$l = \frac{1}{E_1} \int_0^L \frac{(P + \int_0^x p x' \varphi(x)) x'}{\varphi(x)} dx$$

N. B. Nella pratica anche in questo caso suole misurarsi l'allungamento pel principio precedente, prendendo per A la sezione infima del pezzo.

10. Se un pezzo di resistenza assoluta positiva è composto da più pezzi collegati tra loro; in tal caso debbe aversi riguardo alla resistenza dei legami che valgono a collegare tra loro le varie parti del pezzo composto, ovvero alla *Resistenza della Costruzione* del pezzo: e può aversi lume dai precedenti principi: e nei casi di rilevanza, dovrebbe direttamente sperimentarsi questa resistenza.

A pag. 30 sono registrate le resistenze delle viti a legname.

11. La più gran forza alla quale può reggere una fune, una catena, ed una gomina a fil di ferro è data dalla tavola a pag. 26 od anche si ha moltiplicandone l'area della sezione in once quadrata pel modulo di ultima coesione, registrato nella tav. a pag. 29: e parimenti si ha la più gran forza cui può reggere una correggia.

N. B. In pratica non mai debbe arrivarsi a questi limiti: anzi può avvenire la rottura anche prima di arrivarvi.

12. La più gran forza alla quale conviene far soggiacere una fune od una catena od una gomina è data dalla tav. a pag. 25; o si ottiene anche moltiplicandone l'aja della sezione in once quadrata per una frazione del modulo di ul-

tima coesione espressa con C' e di cui i limiti, sono dati nella tav. a pag. 29.

La formola è

$$F = C'A$$

* 13. La *fatica meccanica spesa da una forza*, applicata all'estremo di un dato pezzo con direzione coincidente col suo asse e tirandolo, prima che essa forza non sia trasmessa all'altro estremo del pezzo, si ha moltiplicando l'inverso del coefficiente di elasticità nel quadrato della forza, e nel rapporto della lunghezza del pezzo all'aja della sua sezione.

La formola è

$$lF = \frac{1}{E_1} \cdot F^2 \frac{10L}{A}$$

N. B. Questo principio è vero nella pratica, quando la A e la F sono nella relazione che debbono avere in conformità dei principj primo e secondo.

ESEMPIO 1.°

40. Il pezzo operatore del *Torchio idraulico* consiste in un piatto su cui ponesi l'oggetto che vuolsi comprimere; ed agendo la *pompa d'iniezione*, l'acqua racchiusa nel cilindro spinge in sù l'oggetto da premere, che viene stretto così tra esso piatto ed il *pezzo di resistenza* sovrapposto, il quale è tenuto a suo posto da quattro *tiranti* che ligano esso pezzo di resistenza colla *base* del torchio, sulla quale reagisce l'acqua racchiusa nel cilindro.

Un torchio idraulico debba comprimere l'oggetto messo sul suo piatto con forza totale equivalente a 4000 cantaja. Quanto dovranno farsi grossi i suoi quattro tiranti di ferro forgiato?

41. In primo, essendo quattro i tiranti, potremo avere che ciascuno di essi debba essere teso con forza uguale alla quarta parte dei 1000 cantaja, cioè con forza uguale a 250 cantaja.

Essendo questa forza di tensione piuttosto notevole, sceglieremo il ferro della migliore qualità; sceglieremo dunque (vedi la tav. a pag. 20) od il ferro di Russia, o quello di

Svezia. Supponiamo che sia il primo. E dovendo il torchio agire non per istanti, ma per un certo tempo finchè la compressione dell' oggetto non abbia effetto, e poi potendo restare inoperoso per alcun tempo, è uopo che la elasticità dei tiranti di che si tratta non si alteri. Però ricorreremo al secondo principio; ci avvaleremo della formola

$$F = C'A;$$

e prenderemo per C' un valore prossimo al terzo del modulo di ultima coesione, cioè più prossimo al limite massimo che non al minimo. Però vi faremo

$$F = 250 \text{ cant.} = 25000 \text{ rot.}$$

$$C' = 10800;$$

e volendo che il tirante sia rotondo, porremo (chiamando x il diametro ignoto del tirante)

$$A = \pi \left(\frac{x}{2} \right)^2 = 0,7854 \cdot x^2.$$

Quindi la equazione determinatrice del diametro del tirante sarà

$$25000 = 10800 \cdot 0,7854 \cdot x^2$$

onde

$$x^2 = \frac{25000}{0,7854 \cdot 10800} = \frac{25000}{8482}$$

$$x^2 = 2,9474.$$

È quindi prossimamente

$$x = \sqrt{2,95} = 1,717.$$

Dunque faremo con ferro di Russia, ogni uno dei quattro tiranti del torchio idraulico, con barre del diametro di due once: e saremo certi che non solo sarà capace di comprimere con forza di mille cantala, ma di più che così comprimendo, i tiranti non perdono di loro elasticità.

ESEMPIO 2.º

42. Abbiasi un tetto di grande portata; e le *piane* delle *incavallature* sue sieno marcite o tarlate, così che è uopo rifarle da nuovo. Ora per non smontare tutto il tetto, si pensò di sostituire ad esse piane, di legname castagno salvatico, dei tiranti di ferro.

Teor. delle Res.

Di che riquadratura dovranno farsi questi tiranti, perchè resistano come resistevano quelle piane essendo nuove?

43. Per risolvere la questione cominciamo dal misurare la riquadratura delle piane. E siane la larghezza di once 4 e l'altezza di once 6. Qui prendiamo la equazione

$$F = C'A$$

data dal secondo principio; e poniamovi

$$A = 6 \cdot 4 = 24;$$

ed essendo probabile che la piana soprabbondava in resistenza, senza di che sarebbesi spezzata quando tarlata o marcita, vi poniamo

$$C' = 900$$

numero prossimo al limite minimo della parte del modulo di coesione che trovo nella tavola a pag. 19 pel castagno salvatico. Ottengo

$$F = 900 \cdot 24 = 21600.$$

Posso dunque ritenere, per sicurezza, che lo sforzo il quale poteva sostenere la piana di legno, da essere sostituita dal tirante di ferro ed al quale questo deve reggere, possa essere al massimo di 22000 rotoli; o che almeno non mai possa arrivare a sostenere tanto sforzo.

44. Ora riprendo la medesima formola

$$F = C'A$$

del secondo principio; e volendo fare il tirante con piastre grosse un quarto della larghezza e con ferro inglese di buona qualità, vi pongo (chiamando x la larghezza richiesta del tirante).

$$A = \frac{1}{4}x \cdot x = \frac{x^2}{4}$$

$$F = 22000;$$

$$C' = 7000$$

valore prossimo al medio, tra i due limiti della parte del modulo di ultima coesione notato nell'ultima colonna della tav. a pag. 20, essendo qui lo sforzo continuato bensì, ma non sempre della massima intensità.

Risulta

$$22000 = 7000 \frac{x^2}{4}$$

onde

$$x^2 = \frac{88000}{7000}$$

prossimamente

$$x = \sqrt{12,6} = 3,55.$$

Dunque il tirante, a soprabbondare in cautela, si farebbe largo once 3,6 decimi, grosso once 0,9. E poichè un tirante di tale dimensione potrebbe sembrare troppo grosso, e meglio essendo che due di essi prendano immezzo i puntoni di ogni incavallatura, se ne porranno due accoppiati

di larghezza once 2,5

di grossezza. 0,6

e l'armatura sarà più svelta ed anche più resistente; perciocchè il ferro piatto è comparativamente più resistente quando è meno grosso.

Potrà dunque prendersi in commercio il ferro inglese di $2\frac{5}{8}$ inch per $\frac{5}{8}$ inch. (l'inch, la dodicesima parte del foot, piede inglese).

ESEMPIO 3.°

45. In alcuni carri destinati a trasporto, il peso da trasportare si appende di sotto al carro, e si eleva da terra per mezzo di una vite a risalto rettangolare fatta da buon ferro forgiato, di cui la femmina fa corpo col traino del carro stesso. Abbiasi uno di tali carri, e la vite elevatrice ne sia fatta di buon ferro di Svezia; e così che il nucleo ne sia del diametro di once 2.

Qual peso potrà elevarsi per una tal vite con nucleo del diametro di once 2, senza che ne scemi la elasticità del metallo di che è composta?

46. Qui anche dovremo ricorrere al secondo principio; e servirci della equazione

$$F = C'A$$

ove F è l'incognita, A l'area della sezione del nucleo, e C' quella parte del modulo di ultima coesione che più conviene alla questione.

In quanto alla A , si ha

$$A = \pi \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 3,1416.$$

La vite, dovendo sostenere il peso durante tutto il tempo per lo quale può trasportarsi, e questo tempo presumibilmente potendo non essere lunghissimo, prenderemo per C' il medio tra i due suoi limiti massimo e minimo, cioè, secondo è espresso nella tavola alla pag. 20, assumeremo

$$C' = 7800.$$

Viene allora

$$F = 3,1416 \cdot 7800 = 24504,48.$$

*Dunque la data vite può elevare e sostenere, senza punto perdere di sua elasticità, un peso di 245 cantaja. E se si rifletta che il risalto avvolgendosi ad elica intorno al nucleo, pur cospira con questo a resistere alla forza traente del peso sostenuto, potremo francamente dire che quella vite, potrebbe sostenere un peso anche maggiore dei 245 cantaja; cosicchè se il peso fosse sostenuto da un capo da quella vite, essendo pur ad un tempo sostenuto dall' altro capo da organo di ugual forza, così come è nei carri detti comunemente *trineapalle* (*tringueballe*) destinati al trasporto de' grandi pezzi di assedio, diremo che il carro fornito di quella vite elevatrice, può sostenere (prescindendo da tutti li altri pezzi che lo compongono, che li supponiamo convenientemente resistenti) un peso di 490 cantaja.*

ESEMPIO 4.°

47. Le caldaje delle macchine a vapore sogliono essere fornite di una *camera dispensatrice del vapore*, la quale talora è inchiodata per via di *chiodi a perni ribaditi* sul corpo della caldaja.

Debba soprapporsi una di tali camere dispensatrici, ad una caldaja in cui il vapore debba generarsi a 6 atmosfere; e vogliasi ad essa fermare con 24 chiodi a perni.

Essendo la camera dispensatrice del vapore di forma cilin-

drica, e di pal. 4,50 di diametro, quanto dovranno essere grossi i 24 chiodi che tener la debbono attaccata alla caldaja?

48. Qui dovendo generarsi il vapore a 6 atmosfere, la pressione che esso eserciterà su ogni oncia quadrata della camera, sarà di trappesi $6.8055=48330$; perciocchè la pressione di un'atmosfera su di un'oncia quadrata è di 8055 trappesi.

Ma le pressioni sulle facce concave della camera non agiscono sui chiodi, perciocchè si esercitano in piani ad essi normali, e l'aja della faccia superiore ed orizzontale di essa camera è (47) di once quadrate

$$\pi \left(\frac{15}{2}\right)^2 = 176,72.$$

Dunque la pressione totale che mette a cimento la resistenza assoluta positiva dei 24 chiodi a perni ribaditi, è di trappesi (176,72) (48330), ossia prossimamente di rotoli 8341: e quindi la forza che tende le fibre di ciascun chiodo sarà di rotoli $\frac{8341}{24}=356$ prossimamente.

Dunque, per risolvere la presente quistione, pur ricorreremo al secondo principio, e perciò alla formola

$$F=C'A.$$

E qui A è l'incognita

F =rotoli 356

e per C' prenderemo $C'=2000$:

valore inferiore al medio notato nella tav. a pag. 20, tra il limite massimo e minimo del valore di C corrispondente al ferro inglese di qualità media; perciocchè potendo avvenire che il vapore debba essere continuamente generato per un tempo più tosto lungo, è meglio, secondo il detto principio, accostarci al limite minimo, che non al massimo. Però chiamando x il diametro che si cerca del chiodo, sarà

$$A=\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2=0,7854x^2;$$

e la equazione di sopra diventerà

$$356=(2000)(0,7854)x^2=1570,8.x^2.$$

E quindi $x=\sqrt{\frac{3560}{15708}}=\sqrt{0,2260}=0,48$

prendendo la radice prossimamente superiore.

Dunque ciascun chiodo, o perno ribadito potrà avere il diametro di 48 centesimi di oncia; e meglio si farà mezz'oncia grosso di diametro; e si sarà certi essersi lungi da sinistro.

ESEMPIO 5.°

49. Tra le macchine elevatrici di pesi, primeggiano i *paranchi*, che sono *taglie* accoppiate: e si vede farsene uso sì nell'innalzare ogni sorta di materiali nelle costruzioni architettoniche, come attaccati alle *capre* destinate ad elevare le bocche da fuoco da porre sulli affusti, ed anche attaccati alle *grue* nelli opificii.

Abbiassi un paranco le di cui taglie comprendano due pulegge con gola di oncia $1\frac{1}{2}$ di diametro, cosicchè la più gran fune che possa avvolgersi sarebbe di circonferenza pal. 0,39. Si domanda; qual peso potrebbe elevarsi con esso paranco, posto che tutte le altre cose siano convenientemente proporzionali alla gola delle pulegge?

50. Ricorreremo alla tavola posta a pag. 25; e nella prima colonna, essendovi segnati i numeri 0,34 e 0,41, tra quali è prossimamente medio il dato 0,39, e più vicino al 0,41, che non al 0,34, conchiuderemo che il più gran peso che può affidarsi ad un capo di che si tratta può essere poco più della semisomma dei numeri posti nello stesso rigo dei primi, nella terza colonna, cioè poco maggiore di

$$\frac{14,53 + 20,94}{2} = 17,73.$$

Può dunque affidarvisi il peso di 18 cantaja.

Ma per comporsi il paranco di due coppie di pulegge, sono quattro i capi di fune che lavorano e sostengono il peso.

Dunque il paranco di che si tratta può servire ad elevar pesi di 74 cantaj a.

51. Se il peso dovesse essere sostenuto, non per qualche ora, od anche meno, lo che è il caso più ovvio della pratica; ma dovesse essere sostenuto per più giorni continui, sarebbe prudente caricare il paranco del terzo del peso, o poco di più; cioè di 25 cantaja. Per un istante il paranco po-

trebbe sostenere anche un peso di circa 200 cantaja , come risulta dalla tavola a pag. 26.

In oltre è a riflettere, che il caso qui considerato, è a rigore quello di equilibrio ; perciocchè pegli attriti e pella rigidezza dei canapi, nel caso del moto, la tensione della fune v'è crescendo da un capo all'altro, avendosi la massima tensione nel capo ove è applicata la potenza. Volendo dunque stare al caso del moto, si troverebbe il peso che può essere elevato dal paranco, sostituendo, nella equazione che dà la relazione tra la potenza ed il peso, per la potenza, 18 cantaja; e quindi risolvendo tale equazione, rispetto al peso. Ma ove si rifletta che il peso di prova è molto al di sotto del modulo di ultima coesione (29), vedremo potere stare anche nel caso del moto, al peso di 71 cantaja, non essendo ciascuna taglia che di due sole pulegge.



CAPO II.

DELLA RESISTENZA ASSOLUTA NEGATIVA.

52. Se un corpo prismatico libero è sottoposto ad uno sforzo che lo spinge nella direzione del suo asse, le molecole o fibre sulle quali è applicata la forza, comprimendosi alquanto, mentre da una parte oppongono una certa resistenza alla forza che spinge, dall'altra parte agiscono sulle contigue, che parimenti comprimendosi, da un lato reagiscono sulle prime che ricevono lo sforzo, e dall'altro sur un terzo ordine di esse: e queste sur un quarto ordine, e così di seguito; finchè la compressione od azione della forza arriva all'ultimo ordine di molecole, poste all'estremo del pezzo, opposto a quello su cui agisce la forza: le quali molecole, non avendone altre su cui agire, il corpo tutto intero mettesi in moto, obbedendo allo sforzo che lo spinge. Questa comunicazione della spinta da un ordine all'altro di molecole o fibre del corpo, è cagione che nel fatto uno sforzo minimo può anche non mettere in moto un corpo, e che uno sforzo capace di metterlo in moto, spingendolo, non gli dà veramente moto che dopo un certo tempo, comunque brevissimo.

Che se il pezzo o corpo spinto dalla forza nel senso del suo asse, sia sostenuto invincibilmente dall'altro capo, la medesima azione reciproca spingente di ciascun ordine di molecole o fibre avrà luogo; ma l'ordine estremo di esse, giacente dalla parte opposta a quello su cui agisce la forza, operando sull'ostacolo invincibile, non cederà, nè saravvi moto totale nel corpo. E se la forza cesserà di agire, tutte le molecole o fibre potranno ritornare alla medesima loro posizione primitiva, nel qual caso la *elasticità* del pezzo è *conservata*; o potranno non ritornarvi, nel quale altro caso la *elasticità* sua è *alterata o perduta*, secondo che ritornano verso la posizione primiera, o non vi tornano punto.

Continuando ad agire la forza spingente; ed anche crescendo d'intensità, continueranno a spingersi scambievolmente li diversi ordini di molecole o fibre componenti il corpo; e se da una parte non mai cederà l'ostacolo, perchè invincibile, e dall'altra aumenterà d'intensità la forza spingente, si arriverà ad un punto, in cui le molecole o fibre non potranno più reggere allo sforzo che scambievolmente si fanno, renderannosi inatte a potersi spingere a vicenda, ed a pari tempo a resistere alle spinte; e si sleggeranno. Ed è evidente che se il corpo fosse dappertutto composto di molecole piccolissime, ligate dappertutto da vincolo di pari tenacità, nel caso da ultimo notato, avverrebbe quasi come se il solido si trasformasse in liquido. Ma non tale essendo in generale la natura dei corpi, le sue fibre o molecole si sleggeranno in alcuni luoghi, dove quel vincolo è meno tenace, e quindi il corpo resterà schiacciato sotto lo sforzo al quale non può reggere.

53. E dal precedente ragionamento si fa manifesto, che al cedere del pezzo, ed alla maniera colla quale potrà schiacciarsi, debbe grandemente influire il rapporto delle sue dimensioni trasversali alla sua lunghezza. Ond'è che due casi bisogna distinguere:

- 1.º quello in cui la lunghezza del pezzo abbia un rapporto poco diverso dall'unità a ciascuna delle altre sue due dimensioni
- 2.º l'altro in cui la lunghezza del pezzo sia comparabile bensì alle altre sue due dimensioni, ma che ciascuna di queste, entri più volte nella lunghezza.

54. Nel primo caso, null'altro evvi a considerare che lo schiacciarsi del pezzo; perciocchè, o la sezione trasversale n'è piccola, e non saravvi sensibile accorciamento; o la sezione è molto grande e neppure saravvene del valutabile, non potendosi le fibre accorciare senza in certo modo allargarsi, e questo essendo impedito dalle molte fibre circostanti a quelle che sono verso la parte centrale del pezzo.

55. Nel secondo caso, oltre allo schiacciarsi del pezzo, v'è da considerare l'accorciamento totale, che comunque piccolo, pur debbe subire, prima che poi non si schiaccia.

Ed è chiaro che se il corpo fosse veramente omogeneo, cioè dappertutto composto di fibre o molecole ugualmente resistenti, il corpo si accorcerebbe dappertutto ugualmente, cosicchè, se stesse verticale, i punti di ogni sua sezione orizzontale scenderebbero ugualmente: nè altro effetto sarebbe che l'accorciamento del pezzo. Ma è parimenti evidente, che ove di quelle fibre o molecole, alcune messe in una medesima verticale cedessero più, che altre pur messe in una verticale stessa, ma diversa dalla prima; i punti appartenenti alla medesima sezione orizzontale, non si abbasserebbero tutti ugualmente, ma in vece più quelli pertinenti alle fibre che più si accorciano, meno li altri pertinenti a quelle che si accorciano meno. E poichè queste cose non possono avvenire senza che il pezzo non si pieghi, conchiuderemo che nel secondo caso enunciato, è da considerare ancora la flessione possibile del pezzo.

56. Di qui è che nelli articoli in che è diviso il presente capo discorreremo:

1.° della resistenza allo schiacciamento di pezzi prismatici di altezza prossimamente uguale alla minore dimensione trasversale del pezzo:

2.° della resistenza allo schiacciamento di pezzi lunghi rispetto alla minore loro dimensione trasversale:

3.° dell'accorciamento di questi medesimi pezzi; ovvero del caso in cui *n'è messa a cimento la elasticità assoluta negativa*:

4.° della flessione di essi medesimi pezzi:

5.° diremo con quali riguardi, e come applicarsi le precedenti teorie:

6.° riepilogheremo, e quindi applicheremo a degli esempi le cose esposte.

ARTICOLO I.

Resistenza allo schiacciamento di pezzi di altezza prossimamente uguale alla minore dimensione trasversale del pezzo.

57. I materiali che possono assoggettarsi allo schiacciamento, possono andare distinti in tre classi; cioè

- 1.^a pietre
- 2.^a legnami
- 3.^a metalli.

Ed i fenomeni che si presentano, quando il pezzo si schiaccia, diversificano per ciascuna di queste classi; e parimenti le leggi colle quali ne variano le resistenze: e così debb'essere, perciocchè varia è la struttura fisica dei corpi appartenenti a ciascuna di esse classi.

58. Le pietre quando soggiacciono a gagliarde pressioni, e tali che ne vincono la resistenza, cominciano a cedere col fendersi; e quindi si riducono in frantumi. E quelle di grana fina e compatta, e di omogenea aggregazione, si fendono con strepito, e si dividono in aghi o lame verticali; le tenere si fendono scomponendosi in piramidi coi vertici in un punto centrale, e così, che quelle aventi le basi nelle due facce superiore ed inferiore, operano come cunei, spingendo in fuori le laterali.

E sì le une che le altre, finchè non cominciano a fendersi, sviluppano una certa resistenza, misurata appunto da quel peso che sovrapposto alla pietra è per fenderla. Ma questa resistenza, che dicesi *resistenza allo schiacciamento* od anche *resistenza assoluta negativa*, varia non solo al variare della natura diversa della pietra, ma ancora al variarne delle forme, dei rapporti delle sue tre dimensioni, e della posizione rispettiva delle sue facce.

59. In quanto alla forma, si è dedotto dalle osservazioni che avendosi tre solidi prismatici della stessa materia, di uguali altezze, e di basi di ugual area, l'una circolare, l'altra quadrata, e la terza rettangola, il primo è più resistente del secondo, ed entrambi più del terzo; e che

le loro rispettive resistenze stanno presso a poco, come i numeri naturali 9, 8, 7: cosicchè colla medesima quantità di materia potrà sostenersi un più gran peso da una colonna, che non da un pilastro a base quadrata, ed un più gran peso da questo che non da un pilastro a base rettangola.

60. In quanto ai rapporti delle tre dimensioni, è costante il fatto che di più parallelepiedi di eguale quantità di materia la più grande resistenza l'offre il cubo, e sminuisce a misura che l'altezza si fa maggiore rispetto alle dimensioni della base; od anche che queste vadano crescendo rispetto all'altezza.

Ma come proprio ne vada scemando la resistenza non sappiamo. Il Rondelet fece delli esperimenti per indagare la legge dello scemare di essa, al crescere dell'altezza da una a tre volte il lato delle basi; ma null'altro può conchiudersene se non che più rapidamente scema la resistenza quando dall'altezza uguale ad una larghezza si passa all'altra uguale a due larghezze, che non quando da questa si passa all'altra uguale a tre larghezze.

61. In quanto alla posizione rispettiva delle facce è stato costantemente osservato, che quando le pietre sono cavate da rocce a letti od a strati, ponendole colla faccia parallela al letto od allo strato, in posizione normale alla direzione della forza schiacciante, la resistenza è maggiore di quella che avrebbesi dalla pietra medesima in qualunque altro modo si ponesse; e che, in generale, sempre che la pietra ha *clivaggio* è più vantaggioso tagliarla così che una delle sue facce risulti parallela ad esso clivaggio, e porla in modo che questa medesima faccia sia normale alla direzione della forza: e parimenti che nelle pietre cavate dalle rocce a massa la resistenza è maggiore, quando rispetto alla direzione della forza premente, stanno nella giacitura, colla quale stavano nella cava rispetto alla verticale.

62. I legnami, quando soggiacciono a gagliardissime pressioni agenti con direzione coincidente con quella delle fibre che li compongono, cominciano per accorciarsi, e quindi le

fibre, che sono come unite per via di glutine, si separano; e separatesi si piegano in vario senso, e così restano schiacciati sotto quella pressione. Ed anche per essi, come per le pietre la resistenza è massima quando il pezzo di legno è un cubo; e scema a misura che l'una delle due dimensioni della sua sezione perpendicolare alle fibre va scemando; ed anche a misura che la sua altezza va crescendo rispetto alla minore dimensione di essa medesima sezione: ma questa diminuzione di resistenza non è notevolissima, quando, come è il caso che qui consideriamo, la dimensione del pezzo nel senso della direzione della forza è poco diversa dalle altre sue due dimensioni.

63. Potrebbe anche la forza agire con direzione non coincidente con quella delle fibre, ma con direzione a quella di queste normale. Comunque così stassero le cose, che il pezzo di legno venisse gagliardamente compresso dalla forza, pure in questo caso *non dicesi* essere messo a cimento la resistenza assoluta negativa. Eppure quando la forza è gagliardissima, ed il pezzo ne è gagliardamente compresso, può esso restarne schiacciato; e le fibre del legno, in questo caso, non si piegano punto, ma le superiori, quasi si mettono tra le inferiori, ed il pezzo si schiaccia, slargandosi.

64. I metalli o sono tirati al laminatojo, o battuti sotto il martello, o semplicemente fusi. Li primi sono fibrosi, ed i fenomeni che presentano, quando si schiacciano sotto gagliardissima pressione, non sono molto dissimili da quelli che offre il legume. Li ultimi sono cristallini o granulari, e nello schiacciarsi si fendono sotto angoli più o meno grandi colla faccia premuta, nè sempre riduconsi in frantumi: il ferro fuso si fende sotto angoli di 55 gradi, ma non se ne distaccano i frantumi. I metalli battuti sotto il martello hanno fibre non longitudinali e regolarmente parallele, come quelli tirati al laminatojo, ma irregolari; ed offrono fenomeni partecipanti di quelli che si manifestano nelle altre due sorte di metalli.

Comunque sia però, anche nei metalli il cubo è più re-

sistente che i parallelepipedi: e la resistenza di questi va scemando a misura che ne cresce l'altezza.

65. Pertanto dalle cose dette nei sette numeri precedenti, possiamo conchiudere in generale, che comunque i fenomeni che si manifestano nello schiacciarsi delle diverse sostanze, siano diversi pelle pietre, pei legnami, e pei metalli, pure per tutti han luogo le seguenti verità: cioè

1.^o il cubo offre *più resistenza* allo schiacciamento che ogni altro parallelepipedo o prisma o cilindro rettangolo:

2.^o la resistenza scema, crescendo l'altezza del prisma:

3.^o scema pure, scemando il rapporto dell'aja della sezione trasversale al suo perimetro.

66. Di qui è che dovendosi assumere una unità di misura, onde sottoporre a calcolo la resistenza allo schiacciamento delle varie sostanze, s'è scelta per unità quel peso che sovrapposto ad un cubo, e mettendone a cimento la resistenza assoluta negativa, sta sul punto di schiacciarlo: e questo peso diccsi *modulo di resistenza allo schiacciamento*. E noi prendiamo il cubo di lato un'oncia, pari alla decima parte del palmo napolitano, e dei quali ne vanno mille in un palmo cubo.

Chiamando S questo modulo, esprimerà S stesso la resistenza di un'oncia cubica (la millesima parte del palmo cubico). E se chiameremo con A l'area di un'altro cubo della stessa sostanza, esprimerà SA la resistenza di quest'altro cubo. Però se vorremo una relazione tra la forza F , che sarebbe capace di schiacciare un dato cubo, e la resistenza di questo; facendo

F =la forza comprimente

A =l'area di una faccia del cubo

S =al modulo di resistenza allo schiacciamento, dovremo fare

(I)

$$F=SA:$$

e fintanto che F sia minore di SA il cubo non si schiaccierà.

67. Tenendo in conto la seconda verità (65) potremmo anche dedurre una formola teorica per calcolare la forza che

sarebbe capace di schiacciare un parallelepipedo rettangolo, più lungo che grosso: epperò diverso dal cubo; perciocchè la resistenza del parallelepipedo, dovrebb'essere tal funzione del rapporto dell'aja della sezione alla lunghezza, da ridursi ad SA , quando il parallelepipedo si riducesse ad un cubo.

Ma nel caso attuale trattandosi di pezzi la di cui lunghezza è poco diversa dalla minore dimensione della sezione trasversale, e sempre dovendosi in pratica (come più ampiamente diremo appresso) caricare un pezzo di una forza $F < SA$, potremo, anche trattandosi di un parallelepipedo più alto che grosso, servirci della formola di sopra, tenendoci un poco più al di sotto del valore di SA , di quello che faremmo se si trattasse proprio di un cubo.

68. E parimenti ci regoleremmo se l'aja della sezione fosse diversa dal quadrato, tenendo presente la terza verità delle tre dedotte di sopra.

Solo trattandosi di pietre, possiamo per questo ultimo caso avere formole certe, fondandoci sulle cose dette al num. 59. Per esse, essendo, come sopra, pel cubo di area A

$$(II) \quad F = SA,$$

sarà, pel cilindro di ugual area

$$(III) \quad F = \frac{9}{8}SA,$$

e pel parallelepipedo rettangolo pure della stessa aja di sezione

$$(IV) \quad F = \frac{7}{8}SA.$$

ARTICOLO II.

Della resistenza allo schiacciamento di pezzi lunghi, rispetto alla minore loro dimensione trasversale.

69. Abbiamo già conchiuso in generale (53), che al cedere di un pezzo ed alla maniera colla quale può schiacciarsi, debbe grandemente influire il rapporto delle sue dimensioni trasversali alla sua lunghezza: ed abbiamo pure veduto (65), che quando anche questa lunghezza avesse un rapporto poco diverso dal-

l'unità, alle altre due dimensioni del pezzo, questo ha la più grande resistenza quando è un cubo, e resistenza sempre minore a misura che si fa più alto rispetto al minore lato della sua sezione. Questo scemamento è piccolo, quando la lunghezza è poco più grande della minore dimensione della sezione trasversale del pezzo, ma si fa maggiore a misura che cresce essa lunghezza: e la resistenza scema molto più rapidamente che non cresce la lunghezza.

* 70. Il Rondelet fece una serie di osservazioni dirette a scorgere con quale legge scema nei legnami la resistenza allo schiacciamento a misura che ne cresce la lunghezza rispetto alla minore dimensione della sua sezione trasversale. E ne dedusse che, assunto a modulo della resistenza assoluta negativa dei legnami quella del cubo, cosicchè per un cubo di lato 1 la resistenza è 1; per un parallelepipedo di base quadrata di

lato 1, ed alto	12	la resistenza è $\frac{2}{3}$
per un parallelepipedo di pari base, ed alto. 24		la resistenza è $\frac{1}{3}$
per quello simile, alto	36	la resistenza è $\frac{1}{2}$
pel parallelepipedo della stessa base alto . 48		la resistenza è $\frac{2}{3}$
pel parallelepipedo pure di uguale base, ed alto 60		la resistenza è $\frac{1}{2}$
pel parallelepipedo simile, alto	72	la resistenza è $\frac{1}{3}$

Onde è che per ogni pezzo prismatico di legname di altezza 12, 24, 36, 48, 60, 72 volte il lato della sua sezione trasversale, nella equazione

$$F=SA$$

in vece di S , bisognerebbe porre rispettivamente $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ del valore modulo S spettante al cubo.

Parimenti una serie di osservazioni furono fatte dal Rennie sul ferro fuso per dedurre lo scemamento della sua resistenza assoluta negativa dal pezzo di figura cubica, a quelli di figura parallelepipedo rettangola a base quadrata e di lunghezza uguale a 2, 3, 4, 5, 6, 7, sino ad 8 volte il lato della sua base.

Ma questi sperimentatori non determinarono veramente la legge del continuo decrescere della resistenza al crescere della lunghezza del pezzo rispetto al lato della sua sezione quadrata: non determinarono cioè qual funzione della lunghezza e della larghezza di un pezzo parallelepipedo quadrato, della lunghezza e del diametro di un pezzo cilindrico, è la forza capace di schiacciarlo.

71. Da recenti sperimenti fatti nella gran Bretagna ha potuto dedursi una formola, che dà il valore della forza F , ossia della pressione o spinta cui può soggiacere un pezzo di notevole lunghezza, date che siano le sue dimensioni; e da essa si vede qual funzione è la F delle dimensioni del pezzo. Fatto

b = il lato del pezzo, se di sezione quadrata

d = il diametro del pezzo, se di sezione circolare

L = la lunghezza del pezzo

pei pezzi di *sezione quadrata* la formola è

$$(V) \quad F = \frac{sLb^3}{ab^2 + \beta L^2}.$$

pei pezzi di *sezione circolare* la formola è

$$(VI) \quad F = \frac{sL^4}{ad^2 + \beta L^2}.$$

Nelle quali formole s , α , e β sono dei coefficienti dipendenti dalla natura del materiale di che è fatto il pezzo.

* 72. E pei detti sperimenti si è trovato pure che ove dalle precedenti formole si ottenesse

pel ferro fuso	$F=1000$
si avrebbe pell'acciajo	$F=2518$
pel ferro battuto	$F=1745$
pella querce (di Danzica)	$F=108,8$
per l'abete rosso	$F=78,5$

cosicchè, trattandosi di lunghi pezzi, come per es. di colonne, la più resistente sarebbe di acciaio, poi di ferro battuto, indi di ferro fuso, poi di querce, in ultimo di abete.

ARTICOLO III.

Dell'accorciamento di pezzi lunghi rispetto alla minore dimensione della loro sezione trasversale; ovvero del caso in cui ne è mess' a cimento la elasticità assoluta negativa.

73. Prima che un pezzo non arrivi a schiacciarsi si accorcia, e quindi anche si piega. E se la forza che agisce su di esso, con direzione coincidente con quella delle fibre, è molto minore di quella che produrrebbe lo schiacciamento,

Teor. delle Res.

il pezzo potrà (55) piegarsi ed accorciarsi insieme, e se *perfettamente omogeneo* si accorcerà soltanto. Quando un tale accorciamento è piccolissimo, può assumersi uguale in ogni elemento longitudinale del pezzo. Supponiamo, che così sia. Chiamato l l'accorciamento di un pezzo lungo L , e di sezione l'unità superficiale; sarà $\frac{l}{L}$ l'accorciamento di una unità di lunghezza del pezzo. E questo accorciamento, essendo l'effetto della forza che il produce, potremo assumerlo a misura di essa. Però chiamando f essa forza ed E_2 una costante, potremo fare

$$(VII) \quad f = E_2 \frac{l}{L}.$$

Ora se il pezzo, anzi che essere di sezione l'unità superficiale, fosse di sezione A , e dappertutto omogeneo, è chiaro che per accorciare il pezzo di sezione A per ciascuna sua unità di lunghezza pure come prima di $\frac{l}{L}$, non vi vorrà più una forza f , ma una forza fA . Quindi chiamando F questa forza fA avremo $F = fA$, e quindi

$$(VIII) \quad F = E_2 A \frac{l}{L}.$$

Dalla quale equazione otterremo

$$(IX) \quad l = \frac{FL}{E_2 A};$$

e conosceremo di quanto un dato pezzo lungo L e di sezione A può accorciarsi, a causa della forza F agente sur esso con direzione coincidente con quella dell'asse (4) delle sue fibre.

74. Qui pure, come facemmo al num. 17, possiamo vedere il significato della costante E_2 ; e venendo pur qui la medesima proporzione

$$f : \frac{l}{L} :: E_2 : 1$$

diremo che la E_2 , che chiamasi *Modulo di elasticità nella pressione* è quella forza ideale che sarebbe capace di far accorciare un pezzo di sezione un'oncia quadrata di tanto per quanto esso stesso è lungo.

75. E parimenti stabilendo una proporzione analoga a quella espressa al num. 18, conchiuderemo, che le formole precedenti han luogo soltanto quando una forza doppia produce un accorciamento doppio, una tripla un accorciamento triplo, e così di seguito. La qual cosa in vero *rigorosamente* non ha luogo.

ARTICOLO IV.

Della flessione di pezzi lunghi rispetto alla minore dimensione della loro sezione trasversale.

* 76. Abbiamo già veduto (35) che quando una forza agisce su di un pezzo, per modo da metterne a cimento la resistenza assoluta negativa, la resistenza più o meno grande che il corpo sviluppa dipende dalla difformità che ne soffrono le fibre.

Ora se un pezzo prismatico si piega, il può perchè le sue fibre si difformano. Di fatto piegato che sia un pezzo, da una parte si fa convesso e dall'altra concavo; nè ciò può avvenire che allungandosene le fibre poste verso la convessità ed accorciandosene quelle poste verso la concavità. E se quelle si allungano e queste si accorciano, dovrà stare tra esse una serie di fibre che non si allungano nè si accorciano. Così (fig. 5.) se il pezzo $ACDG$ sia piegato da una forza F per modo che da ASG sia convessità, e da $CS'D$ concavità, è uopo che una serie di fibre poste tra AG , e CD , non si allungano nè si accorciano; e se queste siano progettate in BbE , tutte quelle progettate in $ABEG$ si saranno allungate, e tutte le altre progettate in $BCDE$ si saranno accorciate: ed è evidente che quanto più è curvo il pezzo, cioè quanto più è piccolo il raggio di curvatura della curva BbE , tanto più debb'esser grande l'allungamento delle fibre progettate in $ABEG$ e tanto più grande l'accorciamento di quelle progettate in $BCDE$: cioè tanto più grande la difformità subita dalle fibre; e quindi tanto più grande la resistenza che le fibre del pezzo sviluppano.

Or consideriamo le fibre giacenti tra due sezioni trasversali consecutive SS' , ss' . Nel piegarsi il pezzo, esse fibre svilupperanno una resistenza tanto maggiore per quanto minore è il raggio di curvatura della curva BE in b ; ed essa resistenza reagirà con un certo momento contro l'azione della forza F , momento che pure

sarà tanto maggiore, per quanto minore è esso medesimo raggio di curvatura; perciocchè nel piegarsi del pezzo le varie sue sezioni normali al suo asse dall'essere tutte parallele tra loro si faranno convergenti e normali alla curva BE , e tanto più grande dovrà essere questa convergenza per quanto più si piega il pezzo, ossia per quanto è meno grande il raggio di curvatura della curva BE in ciascun punto. Dunque esprimendo con ϵ una quantità costante per ciascun pezzo, e con r il raggio di curvatura ossia osculatore, potremo assumere che sia

$$\frac{\epsilon}{r}$$

il momento della resistenza che offre il pezzo al flettersi (a).

E perchè dopo essersi piegato alquanto, più non si piega, è necessario che esso momento, per ciascun punto della curva, equipari il momento della forza, pure preso per ciascun suo medesimo punto.

* 77. Assumiamo E per origine delle coordinate della curva EB ; e siano x, y le coordinate di un punto qualunque b di questa curva, rispetto al quale sia r il raggio osculatore. Sarà Fy il momento della forza.

Quindi, per ciò che abbiain detto, sarà

$$(X) \quad \frac{\epsilon}{r} = Fy$$

la equazione dell'equilibrio: ove per r dovremo porre il suo valore in funzione delle coordinate x, y del punto qualunque b della curva BE .

Ponendo per r il suo valore

$$r = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{-y''}$$

(ove y'' è negativa, perchè il pezzo rivolge concavità all'asse delle x), viene in generale

$$(XI) \quad \frac{-\epsilon y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = Fy$$

* 78. Supponiamo essere piccolissima la flessione del pezzo. Per ogni accrescimento della x corrisponderà un accrescimento piccolissimo della y ; onde la derivata y' , ch'è uguale al rapporto

(a) Vedremo più innanzi, come possa determinarsi questa ϵ , e come resta giustificata la fatta ipotesi del momento delle resistenze dipendenti dalla elasticità, inversamente proporzionale al raggio di curvatura.

dell' accrescimento dell' ordinata all' accrescimento corrispondente dell' ascissa, sarà una frazione piccolissima; e perciò il suo quadrato y'^2 trascurabile rispetto all' unità. Dunque, per la *flessione piccolissima* sarà

$$(XII) \quad -\epsilon y'' = Fy.$$

Moltiplicando amb' i membri di questa per y' , e dividendo per $-\epsilon$ risulta

$$y'y'' = -\frac{F}{\epsilon} \times -yy'$$

la quale integrata, dà

$$y'^2 = \frac{F}{\epsilon} (K - y^2)$$

nella quale K è una costante.

Questa è la primitiva completa della precedente derivata. Per adattarla al problema di che si tratta, consideriamo che agendo la forza F secondo la retta BE , il suo punto di applicazione B , non può uscire da essa medesima BE , e che perciò la curva BbE deve di necessità avere due ordinate uguali *zero*, l' una in E l' altra in B , e che però debbe averne una massima: e sia h il valore di una tale ordinata massima. Ma al massimo valore di una funzione qualunque, risponde un valore *zero* della derivata di essa medesima funzione. Dunque nell' ultima equazione se $y=h$, debb' essere $y'=0$. Dunque la equazione derivata ultima scritta corrisponderà all' attuale problema quando $K=h^2$

Quindi la primitiva particolare sarà

$$y'^2 = \frac{F}{\epsilon} (h^2 - y^2)$$

onde

$$\frac{y'}{\sqrt{h^2 - y^2}} = \sqrt{\frac{F}{\epsilon}}$$

Integrata quest' ultima, si ha

$$\text{Arc. sen. } \frac{y}{h} = x \sqrt{\frac{F}{\epsilon}}$$

nè qui è uopo aggiungere costante, perciocchè alla origine E delle coordinate, x ed y sono zero contemporaneamente. Dunque

$$(XIII) \quad y = h \text{ sen. } x \sqrt{\frac{F}{\epsilon}}$$

* 79. Dalla quale conoscerebbersi la forma della curva, quando fosse nota la h .

Ma la h l' abbiamo assunta.

Dunque ne verrebbe che, in generale, una medesima forza F potrebbe far prendere diverse curve ad un medesimo pezzo. Lo che palesamente non può stare. Però è necessaria la esistenza di altra cagione, simultanea coll'azione della forza F , la quale insieme con questa determini il ventre della flessione del pezzo, ossia la sua ordinata massima: o che determini con essa l'avvicinamento del termine B del pezzo, all'altro E .

Or se il pezzo fosse perfettamente omogeneo, sarebbesi avvicinamento del termine B all'altro E ; e sarebbe noto dalla (IX): nè sarebbesi flessione (55).

Dunque l'altra cagione simultanea non può dipendere che dalla eterogeneità della materia di che è composto il pezzo: e di fatto allora solo può piegarsi.

Ma questa eterogeneità porterebbe ad una relazione tra il modulo di elasticità ϵ della materia di che è composta il pezzo ed i varii luoghi delle sue fibre; ossia ad una relazione

$$\epsilon = \varphi(x, y, z)$$

della quale bisognerebbe tener conto nell'attuale questione.

Dunque non essendosene tenuto conto, il risultato non poteva che esserne indeterminato.

* 80. Che se in vece di essere una cagione intrinseca alla natura del pezzo, quella che lo piegarlo, ne fosse una cagione estrinseca diversa dalla forza F , in tal caso il problema cessa di essere indeterminato: e riducesi in vece al seguente.

Piegato un pezzo lungo L , di tanto che la distanza dei suoi estremi si riduca ad essere a , qual sarà lo sforzo, che così piegato, può sostenere? quale il suo ventre? quale la curva delle fibre incariabili?

Così presentato il problema sono L ed a quantità note: e tenute ferme tutte le precedenti cose, fatto $x=a$ nella equazione (XIII), dovrà rispondervi $y=0$. Onde essa diventa

$$0 = \text{sen. } a \sqrt{\frac{F}{\epsilon}}$$

e quindi ne risulta

$$\text{sen. } a \sqrt{\frac{F}{\epsilon}} = 0$$

onde

$$a \sqrt{\frac{F}{\epsilon}} = n\pi$$

potendo la n essere un numero intero qualunque.

Dalla precedente relazione abbiamo

$$(XIV) \quad F = \frac{n^2 \pi^2 z}{a^2}.$$

E questo è lo sforzo che può sostenere il pezzo BE , quando già siasi *per altro mezzo qualunque* piegato tanto che i suoi termini siansi avvicinati per $L-a$, e senza che perciò possansi avvicinare di più.

Mettiamo ora questo valore di F nella (XIII). Ne viene

$$(XV) \quad y = h \operatorname{sen} x \frac{n\pi}{a}.$$

Ma nel caso attuale la L non è altro che la lunghezza della curva tra le ascisse $x=0$ ed $x=a$. Dunque

$$L = \int_0^a (1+y'^2)^{\frac{1}{2}} = \int_0^a \left[1 + \left(h \cos x \frac{n\pi}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(XVI) \quad L = a \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 h^2}{4a^2} \right).$$

Quindi ne caveremo

$$(XVII) \quad h = \frac{2}{n\pi} \sqrt{a(L-a)}.$$

E questo è il ventre della flessione del pezzo: ed a tutte altre cose pari, tanto sarà più grande il ventre h , per quanto più furono avvicinati li estremi del pezzo.

Messo questo valore di h nella (XIII), avremo in fine

$$(XVIII) \quad y = \frac{2}{n\pi} \sqrt{a(L-a)} \cdot \operatorname{sen} x \frac{n\pi}{a}.$$

E questa è la equazione della curva presa dal pezzo lungo L , quando li suoi estremi si avvicinarono per $L-a$, ossia si riducessero ad avere la distanza a .

* 81. Le precedenti formole contengono la quantità n , che sembra essere indeterminata; e che nasce da che tutt' i multipli della semicirconferenza hanno per seno lo zero: onde sembra qui presentarsi una nuova indeterminazione. Ma all' incontro la n è sempre determinabile dai fatti del problema. ■

Abbiamo detto, nell' enunciare il problema « piegato un pezzo » lungo L di tanto che la distanza dei suoi estremi si riduca ad « essere a »: si aggiunga e così che due suoi punti diversi stiano sulla congiungente li suoi estremi. Sarà allora $n=1$; perciocchè allora due soli valori di x danno $y=0$. Se si aggiunga in vece: e così che tre suoi punti diversi stiano sulla congiungente li suoi

estremi; dovremo fare $n=2$; perciocchè allora la y è zero per $x=0$, $x=\frac{1}{2}a$, $x=a$.

La n può sempre determinarsi dunque; e debbe assumersi uguale al numero dei punti della curva che vogliansi sulla congiungente gli estremi del pezzo, diminuiti dell'unità. Onde se m esprime il numero di tali punti, dovrà porsi

$$n=m-1.$$

Ed avremo in generale

$$(XIX) \quad F = \frac{(m-1)^2 \pi^2 \varepsilon}{a^2}.$$

Dalla quale si vede che un pezzo piegato, può sostenere uno sforzo agente nella direzione della congiungente i subì estremi, tanto più grande, per quanti più punti ha comuni con essa congiungente.

ARTICOLO V.

Con quali riguardi, e come applicarsi le teorie esposte nei quattro articoli precedenti.

82. Tre cose principalmente abbiamo prese in esame nei quattro articoli precedenti: lo schiacciarsi di un pezzo, e la resistenza che offre quando è nel punto di schiacciarsi: il suo accorciarsi: ed il piegarsi del pezzo.

La teoria relativa a quest'ultimo fatto è imperfetta; perciocchè niun conto sa tenersi della eterogeneità della materia di che è composta il pezzo; eterogeneità senza della quale il pezzo non potrebbe punto piegare (55), quando sottomesso ad una forza premente che agisce con direzione coincidente col suo medesimo asse passante pel centro di gravità della sua sezione trasversale: nè devesi fare nelle applicazioni (meno qualche caso singolarissimo) che i pezzi di resistenza si piegano sensibilmente; anzi ciò deve in ogni modo evitarsi. La qual cosa si ottiene principalmente, facendo soggiacere essi pezzi, a spinte, o pressioni tali, che se fossero ugualmente ripartite su la sezione trasversale di ciascun pezzo, cosicchè tutte le fibre longitudinali ne venissero ugualmente premute, l'accorciamento delle meno resistenti fosse

pochissimo diverso da quello delle più resistenti, ossia che *fosse sensibilmente uguale per tutte*; onde i punti delle varie sezioni trasversali parallele del pezzo posti su medesime rette parallele al suo asse, ugualmente si avvicinarsero. E così facendo, *purchè il pezzo non si scosti molto dall'essere omogeneo*, potremo averlo come inflessibile: e però nelle applicazioni (meno qualche caso singolarissimo) non dovremo considerare che le sole due prime cose dette di sopra. E poichè la terza dipende dal *molto scostarsi* del pezzo dall'essere omogeneo, primo canone fondamentale si è, di fare i pezzi di cui vogliasi mettere a cimento la resistenza assoluta negativa, per quanto più si possa della medesima materia ed omogenea.

E così vediamo messi dalli architetti in un medesimo filare orizzontale di muramento le pietre di medesima natura; e destinarsi dai carpentieri od anche dai costruttori a colonne, o quei pezzi di legno che sono i più omogenei, o proprio gli interi fusti di alberi; li quali, non potendo essere dappertutto omogenei, sono però, quando bene allevati, uniformi in ogni anello legnoso circondante l'asse del fusto,

83. Ma, per quanto si vogliano pezzi omogenei, non potendosi veramente così fare od ottenere; e dovendosi fare da potersi avere, come inflessibili, per le ragioni dette di sopra (82), si ricorrerà all'altro mezzo, quale si è quello di far soggiacere il pezzo ad una pressione molto inferiore a quella, oltrepassando la quale si schiaccerebbe. E però nelle formole riportate nei primi due articoli di questo capo, pelle quantità S, s, α, β , si porranno numeri inferiori a quelli che dovrebbero porre per avere per F quella forza o pressione che schiaccerebbe il pezzo: e questi valori che chiameremo S', s', α', β' , frazioni del modulo S , e delle s, α, β , debbono, tra certi limiti, dedursi dalle esperienze e dalle osservazioni; ed avuto riguardo non solo alla natura fisica dei corpi, ma ancora alla diversa destinazione dei pezzi.

84. E cominciando da quest'ultimo riguardo, è da considerare, come la più parte dei materiali impiegati si nelli

edificii, come nelle macchine, al lungo andare si spossano, e soprattutto quando, posti a cielo scoperto, sono soggetti alle vicissitudini atmosferiche e più esposti ai fenomeni meteorologici e naturali, che potentemente contribuiscono ad alterarne la fisica struttura. Ond'è, che comunque, con mezzi estrinseci, sogliono garantirsi da tali cagioni deterioratrici, pure nello scegliere le frazioni S', s', α', β' , da sostituire ai numeri interi S, s, α, β ; è uopo tenere queste cose in considerazione, ed esse frazioni si prenderanno più prossime ai numeri interi, se tratterassi di pezzi *non soggetti* ad essere deteriorati dalle dette cause estrinseche, e che per *più breve tempo* debbono soggiacere alle forze comprimenti; ed all'inverso si prenderanno *meno prossime* ad essi numeri interi, ossia *più piccole* se si tratti di pezzi *soggetti* ad essere deteriorati da esse cause estrinseche e che per *più lungo tempo* debbono soggiacere alle forze comprimenti.

85. Abbiamo detto (65) che a tutte le altre cose pari, la più gran resistenza l'oppongono i pezzi cubici; e che essa va scemando al crescere della lunghezza del pezzo. Ma per le ragioni dette inuanzi, nelle applicazioni non possiamo far uso della formola (I) che ponendo per S una sua frazione S' , cosicchè quella formola si trasforma nell'altra

$$(XX) \quad F = S' A.$$

Possiamo conchiudere dunque, che sino ad un certo limite, anche pei pezzi non cubici, ma più lunghi che larghi o grossi potremo far uso della medesima formola (XX), in corrispondenza della frazione o parte che è S' di S . Ma ove la lunghezza del pezzo passerà oltre quel limite, dovremo avvalerci in vece

pei pezzi di sezione quadrata della formola

$$(XXI) \quad F = \frac{s' L b^3}{a' b^2 + \beta' L^2}$$

e pei pezzi di sezione circolare, della formola

$$(XXII) \quad F = \frac{s' L^4}{a' d^2 + \beta' L^2}$$

nelle quali s', α', β' , sono, come abbiain detto, frazioni delle s, α, β , debitamente proporzionate.

Ma qual sarà quel limite oltre il quale non potrà più farsi uso della (XX); e dovrà usarsi in vece l'una o l'altra delle (XXI) e (XXII)?

Il Rondelet e altri autori credono, che quando la lunghezza dei pezzi non giunga a dieci volte la minore dimensione della loro sezione trasversale, possono aversi come quelli la di cui lunghezza abbia un rapporto poco diverso dall'unità a ciascuna delle altre sue due dimensioni; che abbiansi cioè *quasi come cubici*; e che possa però farsi uso della formola (XX). Ma sembra che il limite della lunghezza decupla della minore dimensione del pezzo sia troppo grande: così che preso per S' un valore conveniente per lunghezze minori del decuplo, potesse poi essere troppo grande per lunghezze prossime a quest'ultimo limite. Però sarà meglio arrestarsi al limite della lunghezza *sestupla* della minore dimensione del pezzo; e fin qui fare uso della formola

$$F = S'a.$$

E la esperienza e la osservazione han dimostrato qual parte del modulo S debba sostituirvisi in vece di S' . E può ritenersi che debba farsi

per le pietre S' tra $\frac{1}{9}$ ed $\frac{1}{16}$ di S

per li legnami S' tra $\frac{1}{4}$ ed $\frac{1}{6}$ di S

e pei metalli S' tra $\frac{1}{3}$ ed $\frac{1}{4}$ di S .

Limiti assunti, prendendo i medii, tra quelli generalmente ricevuti dai migliori autori inglesi, francesi ed italiani.

E ci avvicineremo più al limite *minimo* che non al *massimo*, secondo che vogliasi *maggiore o minor sicurezza*, secondo che la materia di che è composto il pezzo sia di *peggiore o migliore qualità e meno o più omogenea*, secondo che *più o meno si scosti* dalla forma cubica; ed anche secondo che il pezzo debbe per un tempo *più o meno lungamente continuato* soggiacere all'azione di quelle individuate forze; e pure per opere monumentali sarà meglio non arrivare neppure al detto limite minimo.

86. Per alcuni materiali, come abbiain detto innanzi, la resistenza allo schiacciamento si fa maggiore o minore, secondo che si posi il pezzo a soggiacere alla forza compri-

mente in un modo piuttosto che in un altro. Ma volendosi nelle applicazioni che siavi sovrabbondanza in resistenza, sempre che si potrà si sottometteranno i pezzi alle forze comprimenti nel modo in cui sviluppano la più grande resistenza, nè perciò si altererà il valore di S' da assumersi secondo le norme prescritte in sul finire del paragrafo precedente. Così le pietre se cavate da rocce a letto od a strati, si porranno a giacere colla faccia parallela al letto od allo strato normale alla direzione della forza schiacciante; se aventi clivaggio si porranno colle facce parallele al clivaggio in direzione normale a quella della forza; e se cavate da rocce a massa si porranno a giacere rispetto alla direzione della forza premente, come stavano nella cava rispetto alla verticale: e pur sempre si assumerà S' tra l' $\frac{3}{9}$ e l' $\frac{1}{10}$ del modulo di resistenza allo schiacciamento.

87. Pertanto i valori di S sono registrati nella seguente tavola; e vi sono ancora il maggiore ed il minor valore della frazione S' di S .

NUMERO progressivo del MATERIALE più resistente al meno resistente.	NOME DEI MATERIALI (per ordine alfabetico).	MODULO di resistenza allo schiacciamento in chili - 2.	LIMITI dei valori di S'		MEDIO tra i limiti.
			minimo.	massimo.	
<i>Marmi.</i>					
3	Basalte di Svezia.	13010	1501	1667	1584
1	Basalte dell' Alvergna	16267	1626	1807	1716
4	Granito rosa orientale	6912	691	768	729
10	Granito verde dei Vosgi (francia)	4862	486	540	513
14	Granito bigio dei Vosgi	3322	332	369	350
9	Granito bigio della Bretagna . .	5137	513	570	541
7	Granito della Normandia (garnes)	5514	551	612	581
6	Granito turchino d' Aberdeen .	6087	608	676	642
13	Granito compatto di Peterhead .	3418	342	379	360
12	Granito di Cornovaglia. . . .	3542	354	393	373
5	Marmo nero di Fiandra	6197	619	688	653
15	Marmo di Fiandra (cervelas)	3173	317	353	335
16	Marmo bianco statuario	2569	257	285	271
8	Marmo bianco venato (italiano)	5396	539	599	569
11	Marmo rosso di Devonshire . .	4123	412	458	435
2	Porfido	15717	1571	1746	1658

NUMERO progressivo del MATERIALE per resistente al nuovo resistente.	NOME DEI MATERIALI (per ordine alfabetico).	MODULO di resistenza alle schiacciature in Kg. cm. 2.	LIMITI de' valori di S'		MEDIO tra i limiti.
			minimo	massimo	
<i>Pietre dure.</i>					
2	Arenaria rossiccia durissima .	6386	638	709	673
1	Arenaria bianca	7250	725	805	765
15	Banc-franc, Mont Rouge (Parigi)	2026	202	225	213
9	Beola bigio chiaro di Bevera (Lago maggiore).	3628	362	403	382
21	Coppo di Brambata (Milano)	777	77	86	81
7	Cliquart di Meudon } (Parigi)	3762	376	418	447
11	Cliquart di Mont Rouge } (Parigi)	2819	282	313	297
17	Grit di Derby.	1751	175	194	184
3	Lava Vesuviana durissima di colore cupo.	4987	498	554	526
4	Lava Vesutiana meno compatta.	4767	476	529	502
10	Macigno di Fiesole detta Serena	3314	331	368	349
16	Peperino di Marino (Roma).	1790	179	199	189
6	Pietra d' Istria	4021	402	446	424
5	Pietra di Caserta.	4673	467	519	493
12	Pietra di Portland	2552	255	283	269
8	Pietra silicea di Dundee	3699	370	411	390
22	Pietra gesso, Montmartre (Parigi)	826	82	88	85
13	Pietra d' Angera (Milano) .	2521	252	280	266
19	Pietra di Givry (Châlons sur saine)	1515	151	168	159
18	Pietra di Vieggiù (Milano).	1641	164	182	173
6	Piperno delle vicinanze di Napoli	4650	465	516	490
20	Roche d' Arcueil (Parigi) .	958	96	105	101
14	Travertino di Tivoli (Roma).	2340	234	260	247
19	Viganò di Milano	1068	107	108	108
<i>Pietre tenere.</i>					
4	Lambourde di Conflans (Parigi).	439	44	49	47
14	Lambourde di qualità inferiore	180	18	20	19
1	Pietra di Givry	691	69	73	71
5	Pietra di Saint Leu	432	43	48	46
8	Pietra Pomice prima qualità .	329	33	36	35
10	— seconda qualità .	275	27	30	29
12	— terza qualità .	220	22	20	21
9	Scoria Vulcanica intorno Roma	290	29	32	31
11	Scoria Vulcanica intorno Na- poli prima qualità	259	26	29	28
13	— seconda qualità .	204	20	23	22
6	Tufo Vulcanico di Napoli pri- ma qualità.	408	41	45	43
7	— seconda qualità .	369	37	41	39
3	Tufo Vulcanico di Roma . . .	453	45	50	48
2	Vergelè dei contorni di Parigi.	471	47	52	49

NUMERO progressivo del MATERIALE per risultato al mondo risultato.	NOME DEI MATERIALI (per ordine alfabetico).	MODULO di resistenza alla trazione la trazione.	LIMITI dei valori di S'		MEDIO tra i limiti.
			minimo	massimo	
Legnami.					
22	Abete bianco.	3646	608	911	759
23	Abete rosso	3573	595	893	744
14	Acero fico.	4061	610	1013	812
27	Acero maggiore	3487	581	872	726
26	Acero rosso	3542	590	884	737
23	Acero striato	3621	603	905	734
29	Allanto glandoloso	3377	563	844	703
8	Albatro corbezzolo	4453	742	763	752
4	Albicocco comune.	5270	878	1317	1097
24	Betula bidollo.	3613	602	903	752
2	Bossolo balearico.	6064	1010	1516	1203
10	Carpino comune.	4288	715	1072	893
15	Castagno salvatico	3990	665	997	832
20	Cedro acido	3660	610	915	762
26	Cedro arancio.	3542	590	885	737
21	Cipresso piramidale.	3652	609	914	761
11	Faggio comune	4139	690	1045	867
6	Frassino comune.	4665	777	1166	971
36	Ippocastano, (castagno indiano)	2890	481	722	601
9	Moro bianco	4328	721	1084	902
32	Noce comune	3165	527	791	659
35	Noce nero	2945	491	736	613
7	Olmo nostrale.	4516	756	1129	942
31	Ontano comune	3275	546	819	682
30	Pero.	3291	557	823	690
33	Pino cedro del Libano.	3024	504	756	630
18	Pino Larice (Melise)	3786	631	944	787
19	Platano orientale.	3668	611	917	764
16	Platano occidentale	3931	638	988	823
12	Pruno ciliegio canino	4116	686	1029	857
17	Pruno ciliegio di monte	3912	652	973	812
26	Pruno susino salvatico.	3542	590	885	737
38	Querce forte	2728	454	682	568
39	Querce debole.	1791	298	448	373
5	Robinia falsa gaggia	4705	784	1176	980
28	Salcio bianco	3385	564	846	705
1	Sorbo ciavardello	6166	1028	1541	1284
13	Sorbo salvatico	4115	686	1029	857
3	Tasso libo.	5773	962	1443	1202
34	Tiglio nostrale	3008	501	752	626
37	Tulipifero legno giallo	2867	478	717	597

NUMERO progressivo del MATERIALE più resistente al meno resistente.	NOME DEI MATERIALI (per ordine alfabetico).	MODULO di resistenza alla trazione in rotoli = f .	LIMITI dei valori di S'		MEDIO tra i limiti.
			minimo	massimo	
<i>Metalli.</i>					
4	Ghisa , ovvero ferro fuso il più resistente	98414	24603	32804	28703
6	— il meno resistente.	49729	12432	16576	14504
7	Ferro di fucina il più resistente	39369	9842	13123	11482
8	— il meno resistente	38387	9597	12793	11196
10	Piombo fuso	1067	267	338	312
5	Rame fuso.	64164	16041	21388	18714
1	Rame battuto.	206831	51708	68944	60326
3	Rame giallo, ovvero ottone	99329	24832	33109	28970
9	Stagno fuso	17500	4377	5833	5105
2	Metallo da cannone.	196103	49100	65468	57284

88. Quando il pezzo ha notevole lunghezza rispetto alla minore dimensione della sua sezione trasversale, e più particolarmente, quando la sua lunghezza oltrepassa il sestuplo del lato o diametro della sua sezione trasversale, non più può farsi uso della formola (XX), ma è uopo in vece ricorrere alle (XXI) (XXII); e perchè il pezzo possa considerarsi come inflessibile, e tale che non si sposti sotto la spinta o pressione cui soggiace, è necessario, che assunto L =lunghezza del pezzo in palmi

b =lato della sua sezione in once

d =diametro della sua sezione in once

F =forza espressa in rotoli

le S' , α' e β' abbiano tali valori, che le formole (XXI),

e (XXII) diventano, per ciascun materiale particolare, le seguenti. Cioè, pei

Pezzi di sezione quadrata.

$$\text{di ferro fuso } F = \frac{8610 \cdot b^3 L}{4b^2 + 0,26L^2}$$

$$\text{di ferro malleabile } F = \frac{10017 \cdot b^3 L}{4b^2 + 0,23L^2}$$

$$\text{di querce } F = \frac{1103 \cdot b^3 L}{4b^2 + 0,72L^2}$$

Pei pezzi di sezione circolare.

$$\text{di ferro fuso } F = \frac{5381 \cdot d^4}{4d^2 + 0,26L^2}$$

$$\text{di ferro malleabile } F = \frac{6261 \cdot d^4}{4d^2 + 0,23L^2}$$

$$\text{di querce } F = \frac{1390 \cdot d^4}{4d^2 + 0,72L^2}$$

* Dalle quali formole potremmo anche trovare la F per l'acciajo, e per l'abete rosso, tenendo presente le cose dette al num. 72.

* Non così per le altre specie di materiali, di cui abbiamo riportati i valori del modulo S' , e delle sue frazioni S'' ; non avendosi, per quanto io sappia, esperimenti atti a determinare i coefficienti α' , α'' , β' , da sostituire nelle (XXI) e (XXII) per ciascuna di esse specie di legnami. Ma di altri metalli non sogliono farsi colonne di notevole lunghezza e dimensioni; ed in quanto ai legnami può farsi uso della formola

$$F = nS'A$$

ponendo per n le frazioni espresse al numero 70; e corrispondenti al rapporto delle diverse lunghezze del pezzo, alla minore dimensione della sua sezione trasversale.

89. Per le cose dette nei precedenti numeri, determinate le dimensioni dei pezzi di cui debbe mettersene a cimento la resistenza assoluta negativa, potremo esser certi che i pezzi non solo resisteranno alla forza o pressione che li comprimono, ma ancora non si piegheranno nè perderanno di loro elasticità.

Ma pure si accorceranno alquanto, e comunque per minima quantità.

E però se quei pezzi saranno di trasmissione, la forza agente in un estremo di essi, non si trasmetterà all'altro estremo, che quando il pezzo si sarà accorciato di tanto da sviluppare la necessaria resistenza, perchè possa considerarsi come rigido (1), e trasmettere la forza all'altro estremo. La forza dunque si spenderà sulle prime ad accorciare il pezzo; e la sua fatica meccanica spesa perciò, e che non si trasmette, sarà misurata per conseguenza dal prodotto di essa medesima forza per l'accorciamento: ossia essendo F la forza ed l l'accorciamento, sarà espressa da Fl .

E di qui la primordiale applicazione della formola (IX).

Ma per avvalercene è necessario conoscere il valore di E_2 che entra in essa formola.

90. Dalla formola (VIII) abbiamo

$$E_2 = \frac{FL}{\Delta l};$$

onde, preso un pezzo di sezione A e lungo L , e postolo a giacere verticalmente, caricatelo da un peso F , e misurato ne l'accorciamento l , potremmo dedurne direttamente il valore di E_2 . Ma un tal valore deducesi approssimativamente per altra via come diremo appresso.

91. Per ora basta ritenere, che dalla formola (IX) può cavarsi la fatica meccanica perduta in una trasmissione, a causa della non rigidezza del pezzo. Ed è data dalla formola

$$\frac{F^2 L}{E_2 \cdot A}.$$

* 92. Prima di andare oltre, ci piace riportare qui anche ritenendo le misure e pesi francesi, la tavola che il Morin riporta nel suo *Ajuto Memoria*, nella quale però non sono i moduli di resistenza allo schiacciamento, ma ciò ch'è detto « peso di cui può caricarsi con sicurezza ogni centimetro quadrato ».

Per farne uso bisogna ricorrere alla formola $F = S'A$, ove S' sarà il numero notato nella tavola, per ogni rapporto, pure quivi notato, tra la lunghezza del pezzo e la minore dimensione della sua sezione trasversale; A l'area della sezione trasversale del pezzo misurato in centimetro quadrato; ed F è dato in kilogrammi.

Teor. delle Res.

10

MATERIALI.		P E S O				
		in kilogrammi per ogni centimetro.				
Legnami	Quercia forte . . .	30,00	25,00	15,00	5,00	2,50
	Quercia debole . .	19,00	8,40	5,60	"	"
	Abete giallo o rosso	37,50	31,00	18,70	7,50	"
	Abete bianco . . .	9,70	8,20	4,90	"	"
Metalli	Ferro battuto . . .	1000,00	835,00	500,00	167,00	84,00
	Ferro fuso	2000,00	1670,00	1000,00	333,00	167,00
Pietre	Basalte	200,00	"	"	"	"
	Granito duro . . .	70,00	"	"	"	"
	Granito ordinario .	40,00	"	"	"	"
	Marmo duro . . .	100,00	"	"	"	"
	Marmo bianco ve-					
	nato	30,00	"	"	"	"
	Grès duro	90,00	"	"	"	"
	Grès tenero	0,40	"	"	"	"
	Pietra calcarea du-					
	rissima	50,00	"	"	"	"
	Pietra calcarea or-					
	dinaria	30,90	"	"	"	"
Malte	Lomburde di qua-					
	lità inferiore . . .	2,30	"	"	"	"
	Gesso	6,00	"	"	"	"
	Smalto idraulico di					
Laterizi	buona qualità di					
	18 mesi	4,00	"	"	"	"
Laterizi	Cemento ordinario					
	di 18 mesi	2,50	"	"	"	"
	Mattone durissimo	12,00	"	"	"	"
Laterizi	Mattone ordinario.	4,00	"	"	"	"
RAPPORTO DELLE LUNGHEZZE ALLA MINORE DIMENSIONE DELLA SEZIONE.		Al di sot- to di 12	12	24	48	60

ARTICOLO VI.

*Si riepilogano le cose esposte e si applicano
a degli esempi.*

93. Dalle cose esposte ne' cinque articoli precedenti si desumono le seguenti *Definizioni*, e *principii fondamentali relativi alla resistenza assoluta negativa*.

Definizioni.

1. *Resistenza assoluta negativa* di un pezzo è quella che il pezzo oppone ad una forza che agisce sur esso con direzione coincidente col suo asse, e che il *preme o spinge*. Qui la resistenza del pezzo ne uguaglia la *pressione*.

2. *Si mette a cimento l'ultima tenacità di un pezzo*, e la sua resistenza allo schiacciamento, quando è prossimo ad essere schiacciato dalla forza che lo *spinge o preme*.

3. *Si mette a cimento la elasticità assoluta negativa di un pezzo*, quando lungi dallo schiacciarsi, subisce un certo accorciamento, od anche è per piegarsi, o piegasi di poco.

4. *È conservata la elasticità assoluta negativa di un pezzo*, quando cessando l'azione della forza, che avealo accorciato o ch'avealo per poco piegato, ritorna allo stato primiero.

5. *È alterata la elasticità assoluta negativa di un pezzo*, quando, cessata l'azione della forza che avealo accorciato od era per piegarlo, esso non riprende proprio la forma e lunghezza primiera.

6. *È perduta la elasticità assoluta negativa di un pezzo*, quando, cessata l'azione della forza che avealo accorciato o per poco piegato, quasi non riprende nè la lunghezza nè la forma primiera.

7. *Modulo di resistenza allo schiacciamento* è il più gran peso in rotoli, cui può soggiacere un cubo di lato un'oncia (la decima parte di un palmo) messo così su di un piano orizzontale, che le sue fibre stiano verticali. Esprimesi con *S*; ed i valori ne sono dati nella terza colonna delle tavole messe a pag. 68, 69, 70 e 71. Vi sono pure notati i limiti ed il medio di essi limiti di parti di essi valori.

8. *Modulo di elasticità assoluta negativa* è quel peso ideale che soprapposto ad una verga verticale, di sezione un'oncia quadrata, sarebbe capace di accorciarla di tanto, di quanto è la sua medesima lunghezza, *posto che li accorciamenti fossero uniformi e sempre proporzionali ai pesi prementì*.

È espresso da E_2 ; e fin tanto che l'accorciamento è piccolissimo nel pezzo, suol aversi, come uguale al modulo di elasticità assoluta positiva.

9. *Ventre della flessione di un pezzo* di cui n'è mess' a cimento la resistenza assoluta negativa, è l'ordinata massima della curva della flessione, alla retta che congiunge li estremi dell'asse del pezzo.

Principii.

Si noti che nelle formole od equazioni riportate appresso, è
 F =forza agente sul pezzo,

S =modulo di resistenza allo schiacciamento,

S' =parte del precedente modulo, che può diversamente variare, secondo la diversa materia,

E_2 =coefficiente, o modulo di elasticità,

L =lunghezza del pezzo in palmi,

A =area della sezione in once quadrate,

l =allungamento del pezzo lungo L ,

$*a$ =distanza a cui si è ridotta quella degli estremi del pezzo,

k =ventre della flessione,

ϵ =momento di elasticità,

x } coordinate dei punti della curva che prendono le fibre inva-
 y } riabili,

π =rapporto della circonferenza al diametro,

n =numero delle ordinate zero.

1. Tutt' i materiali danno segni manifesti che sono per schiacciarsi.

Le pietre di grana fina, compatta ed omogenea, dividonsi in aghi o lame verticali: le tenere dividonsi in piramidi col vertice al centro.

I legnami si fendono, separandosene le fibre, che sono unite come da glutine, le quali si piegano di poi in varia guisa.

I metalli tirati al laminatojo, offrono fenomeni non molto dissimili da quelli dei legnami; i *fusi* si fendono ad angolo colla faccia premuta, nè sempre si riducono in frantumi;

se battuti sotto il martello, offrono fenomeni partecipanti delli altri due.

2. Il cubo offre resistenza *allo schiacciamento maggiore di ogni altro parallelepipedo rettangolo*. Misurasi dal prodotto del modulo di essa resistenza, all'aja della faccia del cubo.

La formola è

$$F=SA$$

ed i valori di S sono dati nella terza colonna delle tavole messe a pag. 68, 69, 70, 71.

N. B. Nella pratica non converrebbe caricare un cubo di una forza data da quest'ultima formola. La S si assume così, che il materiale premuto non perda di sua elasticità.

3. La resistenza allo schiacciamento, a pari sezioni, scema crescendo l'altezza del parallelepipedo; ed anche scemando il rapporto dell'aja della sezione trasversale al suo perimetro.

4. Nelle *pietre* le resistenze allo schiacciamento di tre prismi di uguale altezza, e di sezioni di ugual area, ma l'una circolare, l'altra quadrata, e la terza rettangola, stanno tra loro *prossimamente* come i numeri naturali 9, 8, 7.

Le formole sono: pel prisma a base circolare

$$F=\frac{9}{8}SA:$$

pel prisma a base quadrata

$$F=SA:$$

pel prisma a base rettangola

$$F=\frac{7}{8}SA.$$

ed i valori di S sono dati nelle tavole messe a pag. 68, e 69.

N. B. In pratica deve caricarsi il prisma di forza a questo inferiore; e s'ottiene mettendo per S i valori di S' i di cui limiti sono dati nelle tavole

5. Nelle *pietre* la resistenza *scema* pure se l'altezza è minore di ciascuna delle dimensioni della base. *Cresce* se la forza preme perpendicolarmente alle facce *del letto*, o dello *strato*, o del *clivaggio*: od alla faccia che nella cava tenevasi orizzontale, se la roccia non è nè a letto, nè a strati nè a clivaggio.

6. Nei pezzi lunghi rispetto alla minore dimensione della loro sezione trasversale, la resistenza varia al variare delle sue tre dimensioni.

La legge della variazione è data
pei pezzi di sezione quadrata dalla

$$F = \frac{sLb^3}{ab^2 + \beta L^2}$$

pei pezzi di sezione circolare dalla

$$F = \frac{sLd^4}{ad^2 + \beta L^2}.$$

7. Se abbiansi lunghi pezzi di varie sostanze, e tutti di uguali dimensioni: chiamato

pel ferro fuso la resistenza . . .	$F=1000$
sarà per l'acciajo	$F=2518$
pel ferro battuto	$F=1745$
pella querce (di Danzica) . . .	$F= 108,8$
per l'abete rosso	$F= 78,5$

8. I pezzi di cui voglia mettersi a cemento la resistenza assoluta negativa, debbono farsi, per quanto più si possa, omogenei.

9. La più gran forza, che senza perdere di sua elasticità, un pezzo prismatico di breve lunghezza rispetto alle dimensioni della sua sezione trasversale, può sostenere, è data in rotoli dal prodotto dell'aja della sua sezione in once quadrate, in una frazione del modulo di resistenza allo schiacciamento

per le pietre compresa tra $\frac{1}{3}$ ed $\frac{1}{4}$

pei legnami compresa tra $\frac{1}{4}$ ed $\frac{1}{5}$

pei metalli compresa tra $\frac{1}{5}$ ed $\frac{1}{4}$.

E più vicino al limite massimo se la materia di che è composta il pezzo è di migliore qualità ed omogenea, se il pezzo meno si scosta dalla forma cubica, e se l'azione della forza debb'essere continuata per breve tempo: e più vicino al limite minimo se la materia è di qualità meno buona e meno omogenea, se il pezzo più si scosta dal cubo, e se l'azione della forza debb'essere continuata per lungo tempo.

La formola è

$$F=S'A$$

ed i limiti dei valori di S' sono dati nelle tavole a pag. 68, 69, 70, e 71.

N. B. Li autori francesi ritengono che se la lunghezza, non arriva a dieci volte la minore dimensione trasversale il pezzo può aversi di breve lunghezza: è meglio limitare questa lunghezza al sestuplo.

10. La più gran forza premente, che un pezzo prismatico verticale, di notevole lunghezza rispetto alle altre sue due dimensioni, può sostenere senza perdere di sua elasticità, è data, se di sezione quadrata

$$\text{pel ferro fuso da } F = \frac{8610 \cdot b^3 L}{4b^2 + 0,26L^2}$$

$$\text{pel ferro malleabile da } F = \frac{10017 \cdot b^3 L}{4b^2 + 0,23L^2}$$

$$\text{per la querce da } F = \frac{1103 \cdot b^3 L}{4b^2 + 0,72L^2}$$

se di sezione circolare

$$\text{pel ferro fuso da } F = \frac{5381 \cdot d^4}{4d^2 + 0,26L^2}$$

$$\text{pel ferro malleabile da } F = \frac{6261 \cdot d^4}{4d^2 + 0,72L^2}$$

$$\text{per la querce da } F = \frac{1390 \cdot d^4}{4d^2 + 0,72L^2}$$

N. B. In pratica si arriverà ai valori di F dati da queste formole, nel solo caso che la materia è di ottima qualità e quasi omogenea. Se ha luogo il contrario si prenderà per F un valore alquanto minore di quello che sarà dato dalle formole precedenti. Se il pezzo è di altro metallo si abbia riguardo al principio 7: se di altro legname al detto al numero 70.

* 11. Se una forza mette a cimento la elasticità assoluta negativa, di un pezzo prismatico, e la materia di che è composta il pezzo è perfettamente omogenea, l'accorciamento che per essa forza è prodotto nel pezzo, si misura dal prodotto del rapporto della forza al modulo di elasticità, nell'altro della lunghezza del pezzo alla sua sezione.

La formola è

$$l = \frac{F}{E_2} \cdot \frac{10L}{A}.$$

N. B. Questa formola è fiduciale, finchè l'accorciamento del pezzo è piccolissimo: cioè quando il rapporto $\frac{l}{L}$ è piccolissimo.

* 12. La *fatica meccanica* spesa da una forza applicata all'estremo di un dato pezzo perfettamente omogeneo, e con direzione coincidente col suo asse e premendolo, prima che essa forza sia trasmessa all'altro estremo del pezzo, si ha moltiplicando l'inverso del modulo di elasticità nel quadrato della forza, e nel rapporto della lunghezza del pezzo all'aja della sua sezione.

La formola è

$$lF = \frac{1}{E_2} \cdot F^2 \frac{10L}{A}.$$

N. B. Questa formola è fiduciale nel caso di un'accorciamento piccolissimo.

* 13. Se una forza mette a cimento la *elasticità assoluta negativa* di un pezzo prismatico *non perfettamente omogeneo*, e di lunghezza notevole rispetto alle altre sue due dimensioni, il pezzo potrà *piegarsi*; e piegandosi, l'asse delle sue fibre invariabili si conformerà secondo una *sinusoide*, di cui la equazione è la

$$y = h \operatorname{sen} x \sqrt{\frac{F}{\epsilon}}$$

e non potendosi conoscere *matematicamente* la h , la curva resterà come indeterminata.

* 14. Se il pezzo *per cagione estrinseca* sia piegato tanto che la distanza dei suoi estremi si riduca ad a , mentre essendo ritto era L , lo sforzo che così piegato può sostenere è dato da

$$F = \frac{n^2 \pi^2 \epsilon}{a^2}$$

ed perciò i suoi estremi si avvicineranno di più: il ventre della flessione è data dalla

$$h = \frac{2}{\pi n} \sqrt{a(L-a)}$$

e la curva che ne prende l'asse delle fibre invariabili ha per equazione

$$y = \frac{2}{n\pi} \sqrt{a(L-a)} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n}{a} x.$$

ESEMPIO 1.°

94. *Abbiasi una colonna di palmi 4 di diametro all' imoscapo, fatta di più pezzi di marmo bianco venato italiano, ciascuno alto presso a poco quanto il detto diametro; ed essendo la colonna otto diametri alta. Si domanda 1.° sotto qual peso la colonna potrebbe manifestare i fenomeni che precedono lo schiacciamento: 2.° qual peso potrebbe sostenere con sicurezza e per lungo tempo.*

95. Il pezzo più basso di marmo della colonna, oltre a sostenere il peso sopraincumbente ad essa, debbe sostenere il peso di tutta la superiore parte di colonna. Dunque se risponderemo alla dimanda pel pezzo inferiore, resterà risoluta per l'intera colonna.

Ora ecco, come faremo. Vedremo prima sotto qual peso il pezzo di marmo manifesterebbe i fenomeni che precedono lo schiacciamento; quindi da un tal peso, dedurremo quello di tutta la parte di colonna che soprastà al suo pezzo più basso; e la differenza sarà il peso dimandato.

Per trovare il primo peso ricorro al quarto principio, potendosi qui avere il pezzo che si considera, come cilindrico; e però prendo la formola

$$F = \frac{9}{8} S A :$$

ed è a rammentarsi che la A è data in once quadrate; onde bisognerà calcolare il diametro della base del pezzo di 40 once. In questa formola fò dunque

$A = \pi r^2 = 3,1416 (20)^2 = 1256,64$ area del circolo base del pezzo

$S = 5396$ valore del modulo della resistenza pel marmo venato italiano notato nella tav. a pag. 68.

Risulta

$$F = \frac{9}{8} (5396) (1256,64) = 7628433.$$

Quel pezzo della colonna dunque comincerebbe a fendersi quando sopracaricato di un peso di 76284 cantaja: e si

Teor. delle Res.

schiaccerebbe di certo se la colonna si caricasse di tutto questo peso. Perchè ciò non avvenisse, bisognerà scemare, come è detto di sopra, di tanto un tal peso per quanto è il peso della parte di colonna soprastante. Che supporremo cilindrica per prescindere dal capitello.

Per calcolare il peso della colonna ne moltiplicheremo il volume pel peso dell'unità di volume.

Ora il cilindro costituente la rimanente porzione di colonna è alto sette diametri, cioè pal. 28. Dunque il volume ne sarà

$$3,1416(2)^2(28) = \text{pal. cubici } 351,8592.$$

La gravità specifica del marmo bianco venato italiano è 2726, essendo 1000 quella dell'acqua. Dunque, il peso di un palmo cubico di acqua essendo di rotoli 20,736 troppesi; quello di un palmo cubo del detto marmo sarà di rotoli

$$(2,726)(20,736) = 56,517.$$

Di qui, il peso della parte della colonna, superiore al pezzo inferiore di che è composta, sarà di rotoli

$$(352)(56,517) = 1893,984.$$

Quindi dal valore precedentemente trovato per *F* sottratto questo peso, avremo quel peso sotto del quale comincerebbero a manifestarsi nella colonna quelli fenomeni che precedono lo schiacciamento. E sarà

$$7\,628\,433 - 1894 = 7\,626\,539.$$

Dunque quella colonna, se fosse caricata di 76 265 cantaja, si lesionerebbe, manifesterebbe i fenomeni che precedono lo schiacciarsi del marmo, ed il pezzo più basso, di che è composto, dopo poco potrebbe schiacciarsi.

Ma è a sapere che tutto ciò è vero se la colonna è perfettamente costrutta; se cioè le facce inferiore e superiore di ciascun pezzo sono ben lavorate e messe in opera così che compaiano perfettamente. Se così non fosse veramente, sarebbe come se la *A* avesse un valore minore di quello che gli abbiám dato.

96. Per la seconda dimanda, per sapere cioè qual peso potrebbe sostenere con sicurezza e per lungo tempo la colonna, procederemo nello stesso modo; solo ci avvaleremo

in vece del nono principio ; e prenderemo il minimo valore di S' tav. a pag. 68 , volendosi che la colonna possa sorreggere il peso per lungo tempo. Verrà

$$F = \frac{9}{8}(539)(1256,64) = 762\,843.$$

E questo peso, meno il peso della parte di colonna soprastante al pezzo più basso , darà il peso di che per lungo tempo può essere caricata ; e sarà

$$762\,843 - 1894 = 760\,948.$$

Dunque una colonna di marmo bianco venato italiano di 7 palmi di diametro all' imoscapo e di 8 diametri di altezza , può con sicurezza sostenere e per lungo tempo un carico di 7609 cantaja.

97. Dai risultati ottenuti si vede qual peso enorme può sostenere la colonna di che si tratta , e come il più delle volte , in quanto alla resistenza , le colonne dell' edifizii sono eccedenti in dimensioni : e come le proporzioni romane , che sono seguitate da tutti li architetti , danno una eccedenza grande di stabilità.

Supponiamo che non si avesse una sola colonna , ma un intercolonnio di quattro diametri , e che volesse farglisi sostenere un muro di mattoni grosso pal. 3. Quanto potrebb' essere alto questo muro soprapposto all' intercolonnio ? La risposta è semplicissima. Potrebb' essere tanto alto per quanto la fabbrica soprastante gravitasse su ciascuna colonna per un peso non più grande di 7609 cantaja.

Or vediamo , di quanto sarebbe quest' altezza ?

Chiamiamo x l' altezza che si cerca , sarà il volume del muro che carica su di una colonna , la base sua moltiplicata per x , ossia $3 \cdot 16 \cdot x = 48x$. E questo volume , moltiplicato pel peso di un palmo di fabbrica di mattoni , darà il peso che non deve eccedere 7609 cantaja. Dunque essendo 2000 la gravità specifica della fabbrica di mattoni , presa quella dell' acqua per 1000 ; ed un palmo cubo di acqua pesando rotoli 20,736 , avremo la equazione

$$(48x)(2)(20,736) = 760\,900$$

che ci darà l'altezza x , e risulta

$$x=382:$$

cioè potrebbe quell'intercolumnio sostenere un muro di mattoni dell'altezza di oltre 380 palmi.

Onde ritorna a conchiudersi avere le colonne in uso eccedenti dimensioni in quanto alla solidità. Ma è la stabilità ad impedire altri moti, che giustifica tale eccedenza.

ESEMPIO 2.°

98. Talora nelle costruzioni il fondo sodo, su cui può con sicurezza fondarsi un edificio, sta ad una certa profondità sottoposto alla superficie del suolo, nè è possibile andare a fondarvi su direttamente l'edificio. In tal caso si affondano dei pali in positura verticale, fin tanto che non vanno ad appoggiarsi sul fondo sodo; e quindi su questa *palificata*, che dicesi *palificata a castello*, si poggia l'edificio; il quale però non più immediatamente si poggia sul sodo, ma vi si poggia per mezzo di essa palificata.

Un muro di riva murata debba stabilirsi sur una palificata a castello, pella quale possano adoperarsi travi di querce ciascuno lungo pal. 24 e del diametro di un palmo, ed il muro di sponda voglia farsi tutto di pietra vesuviana, e debba essere alto pal. 44 grosso al piede pal 8 ed alla cima pal. 4. Quanti pali dovranno necessariamente impiegarsi per ogni canna corrente di esso muro?

Per ogni canna corrente corrispondono palmi cubici

$$\left(\frac{8+4}{2}\right)14 \cdot 10 = 840$$

di muro, che essendo di pietra vesuviana non della più compatta, di cui la gravità specifica è 2600 (essendo 1000 quello dell'acqua) peserà per ogni palmo cubico

$$\text{rotoli } (20,736)(2,6) = 53,9136$$

o prossimamente rotoli 54.

Dunque ogni canna corrente del detto muro di sponda peserà

$$\text{rotoli } (840)(54) = 42000.$$

Or trattasi di vedere quanti di quei travi sono necessari a sostenere questo peso.

99. Se n sia il numero ignoto dei pali o travi, sarà $\frac{42000}{n}$ la forza comprimente ciascun trave. Ed avremo ricorso alla formola 6.^a del decimo principio; ove in vece di F porremo $\frac{42000}{n}$.

Ed avremo però

$$\frac{42000}{n} = \frac{1390d^4}{4d^2 + 0,72L^2}.$$

In questa equazione n è l'ignota; e vi è

d = diametro in once = 10

L = lunghezza della trave in palmi = 24.

Fatte le sostituzioni risulta

$$\frac{42000}{n} = \frac{1390000}{400 + 0,72 \cdot 576}$$

ossia

$$\frac{42}{n} = \frac{13900}{814,72}.$$

Onde

$$n = \frac{42 \cdot 814,72}{13900} = \frac{34218,24}{13900} = 2,53.$$

Dunque saremo sicuri che l'edifizio reggerà ottimamente, poggiandolo per ogni canna corrente su tre pali di querce del detto diametro di un palmo.

A rigore per ogni due canne correnti basterebbero cinque pali o travi. Ma si è detto tre per ogni canna, ossia sei per ogni due canne, considerando che i pali debbono sostenere prima lo *zatterone* su cui poi va proprio fatta la fabbrica.

ESEMPIO 3.^o

100. *Vogliasi fare un Torchio capace di produrre una pressione di 400 cantaja per ogni oncia quadrata; ed il piatto premente sia di pal. $1\frac{1}{2}$ in quadro. Si domanda; che diametro debbe avere il nucleo della vite di pressione da farsi di ferro fuso ovvero ghisa la più resistente?*

Comincio dal calcolare la pressione totale, cui deve equiparare la forza premente della vite. Essendo il piatto premente di pal. $1\frac{1}{2}$ in quadro, ossia un quadrato di 15 onces di lato, la sua area sarà di 225 onces quadrate. Ma un oncia deve premere per 100 cantaja. Dunque l'intero piatto deve produrre una pressione di 22500 cantaja. E però la vite di pressione deve soggiacere ad uno sforzo totale di rotoli 2250 000.

La vite non dovendo essere di grande lunghezza rispetto al suo diametro, ricorreremo al nono principio. Però ci avvaleremo della formola

$$F = S' A.$$

Ma non pertanto, comunque la pressione non debba essere per lunghissimo tempo continuata, pure la figura del pezzo scostandosi molto dalla figura cubica, assumeremo per S' il limite minimo dei suoi valori. E prenderemo però, come ci dà la tav. a pag. 71.

$$S' = 24603.$$

Quindi avremo la equazione

$$2250\ 000 = 24603 (3,1416) r^2$$

ove r è il raggio ignoto del nucleo della vite.

Ne viene prossimamente

$$r^2 = \frac{2250000}{77292}$$

e quindi prossimamente

$$r = \sqrt{29} = 5,385.$$

Dunque il nucleo della vite capace di produrre la enorme pressione di duemilioni duecentocinquantamila rotoli, dovrà essere del diametro di undici onces; e saremo certi che resisterà a tanto sforzo; perciocchè abbiamo presi tutti i valori coll' approssimazione in più per r .

101. Quando sotto un torchio così potente ponesi tale materia da comprimersi, che il suo volume può molto ridursi, in tal caso la vite di pressione debbe essere notevolmente lunga; perciocchè notevolmente deve scendere il piatto premente.

Per calcolarsi il diametro da dare al nucleo della vite, in questo caso, cominciasi a fare, come si è detto di sopra;

e se la grossezza risultante sia troppo piccola rispetto alla lunghezza che debbe di necessità avere la vite, bisogna rifare il calcolo da capo avendo ricorso al decimo principio, anzi che al nono.

Or supponiamo che nell'esempio di sopra, per la materia da comprimersi, il piatto premente debba scendere di pal. 11, così che tutta la vite debba esser lunga pal. 13. Avendo noi trovato per diametro del nucleo pal. 1,1; è evidente che la lunghezza del pezzo sarebbe circa dodici volte la sua dimensione per traverso; e che però sarebbe a temersi che venisse a soffrire sotto quella gagliarda pressione, soprattutto se la fusione della vite non fosse perfettissima, così che potesse aversi, come *perfettamente omogenea*. Questo sarà il caso di cominciare il calcolo da capo, servendoci della formola

$$F = \frac{5381d^4}{4d^2 + 0,26L^2}$$

ove dovrem fare

$F = 2\,250\,000$ rotoli

$L = 13$ palmi

essendovi la incognita il diametro d .

Risulta

$$2\,250\,000 = \frac{5381d^4}{4d^2 + 43,94}$$

E quindi trattasi di risolvere la equazione

$$5381d^4 - 9\,000\,000d^2 - 98\,865\,000 = 0.$$

Che risolta porgerebbe le quattro radici

$$d = \pm \sqrt{\left(\frac{4\,500\,000}{5381} \pm \sqrt{\left(\frac{4\,500\,000}{5381}\right)^2 + \frac{98\,865\,000}{5381}}\right)}$$

ma delle quali sono da rigettare le due immaginarie, ed anche è da rigettare la negativa; e non è da ritenere che la positiva che risolve il problema. Dunque sarà successivamente

$$d = \sqrt{\left(\frac{4\,500\,000 + \sqrt{(4\,500\,000)^2 + (5381)(98\,865\,000)}}{5381}\right)}$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{4\,500\,000 + 4\,558\,727}{5381}\right)};$$

e prossimamente

$$d = \sqrt{1683} = 41.$$

Dunque la vite dovrebbe avere il diametro non minore, di pal. 4.

Dunque *non potrebbero avere un torchio a vite della forza di 100 cantaja per oncia quadrata, e della forza totale di 22500 cantaja, quando la vite si volesse di lunghezza notevole rispetto al suo diametro: cioè circa tredici volte esso diametro.*

102. Vediamo quanta sarebbe *la più gran forza che potrebbe avere il torchio in questo caso*, colla vite determinata innanzi (100).

Riprendiamo la formola

$$F = \frac{5381 d^4}{4d^2 + 0,26L^2}.$$

Volendosi la lunghezza tredici volte il diametro, sarà

$$L = 13 d \text{ once}$$

e quindi

$$= (1,3) d \text{ palmi.}$$

Dunque nella formola precedente dovremo in vece di L^2 porre $(1,3)^2 d^2$, ossia dovrà essere

$$F = \frac{5381 d^4}{4d^2 + (0,26)(1,69)d^2}$$

che riducesi alla

$$F = \frac{5381 d^2}{4,4396}.$$

E questa formola darà la più gran forza che può avere il torchio.

Assunto il diametro $d = 11$ once, come abbiamo trovato dovere essere (100) per aversi una forza, di 2250 000 rotoli, quando la vite di pressione potess'essere molto breve rispetto al suo diametro, risulta

$$F = \frac{5381 \cdot 121}{4,4396} = 146566 \text{ rotoli.}$$

Dunque mentre quel torchio, potendo operare con una vite breve rispetto al suo diametro, può fare la enorme pressione di 2250 000 rotoli, operando con una vite di uguale diametro, ma lunga tredici volte il suo diametro, non potrebbe, con sicurezza della macchina, produrre una pressione di oltre 146 600 rotoli.

103. Noi abbiamo supposto nella prima determinazione, aversi del ferro fuso il più resistente. Se si dimandasse di quale pressione sarebbe capace il medesimo torchio se il ferro fuso fosse il meno resistente, dovremmo fare

$$S'=12432.$$

E risulterebbe

$$F=12432 \cdot 95,033$$

ossia

$$F=1181450.$$

Onde la pressione di 2250 000 rotoli che potrebbe farsi colla vite, quando fatta della migliore e la più resistente ghisa, sarebbe ridotta a soli rotoli 1181450, se fosse fatta colla ghisa la meno resistente. E ridurrebbesi, a soli 146566 se dovesse operare la vite con lunghezza uguale a 13 volte il suo diametro.

ESEMPIO 4.°

104. L'organo ricevitore delle macchine a vapore è un cilindro entro cui s'intromette il vapore, nè può riempirlo senza spingere innanzi a sè uno stantuffo che, attaccato invariabilmente al suo gambo che sporge al di fuori del cilindro, comunica, per mezzo di esso medesimo gambo, il moto alle altre parti della macchina. E nelle macchine a doppio effetto il congegno è tale che quel gambo, per una semioscillazione di andata dello stantuffo, spinge il pezzo della macchina al quale comunica il movimento, e nell'altra semioscillazione di ritorno il tira a sè. Però, del gambo dello stantuffo, nella prima semioscillazione n'è mess'a cimento la resistenza assoluta negativa e nella seconda semioscillazione la resistenza assoluta positiva. Può dunque dimandarsi: data la pressione del vapore nella caldaja, ed il diametro dello stantuffo; di quanto dovrà essere grosso il gambo di questo, che si voglia fare di ferro malleabile, perchè la macchina possa lavorare per molto tempo continuo?

Sia la macchina ad alta pressione: la pressione nella caldaja sia di .5 atmosfere, ed il diametro dello stantuffo di un palmo e due decimi, ossia di once 12.

Teor. delle Res.

12

Quì lo stantuffo essendo di 12 onces di diametro , la sua aja è di 113,097 onces quadrate. Dunquè moltiplicando questo numero per la pressione su ogni oncia , avremo la pressione totale.

Or , a rigore , la pressione nel cilindro è inferiore alla pressione nella caldaja ; ma noi per soprabbondare in cautela la faremo a questa eguale. Però , essendo la macchina priva di condensatojo , la pressione risultante sulla faccia dello stantuffo sarà di 4 atmosfere. Onde essendo di 8055 trappesi la pressione di un'atmosfera su di un' oncia quadrata , sarà , la pressione totale , che soffre lo stantuffo , di trappesi

$$4(8055)(113,097) = \text{rotoli } 3644.$$

Dunque il gambo dello stantuffo , o è premuto con forza uguale a 3644 rotoli , o teso colla medesima forza.

105. Per lo primo caso, ricorriamo al decimo principio. Però nella formola

$$F = \frac{6261 d^4}{4d^2 + 0,23L^2}$$

facciamo

$$F = 3644 : \text{pressione}$$

$$L = 3,6 : \text{lunghezza del gambo.}$$

Trattasi di risolvere , come abbiamo fatto al num. 101 , rispetto a d la equazione

$$6261 \cdot d^4 - 4 \cdot 3644 \cdot d^2 - 0,23 \cdot (3,6)^2 \cdot 3644 = 0.$$

Risulta

$$d = \sqrt{\frac{15774}{6261}} = \sqrt{2,5194}$$

e prossimamente

$$d = 1,59.$$

106. Per lo secondo caso ricorriamo al 2.° principio del capo 1.° E perciò nella

$$F = C'A$$

facciamo

$$F = 3644$$

$$C' = 3069 , \text{ come dalla tavola a pag. 20}$$

$$A = 3,1416 \cdot r^2 , \text{ ove } r \text{ è la ignota.}$$

Ne risulta

$$r = \sqrt{0,3779} = 0,6147.$$

107. Dunque perciocchè per resistere alla tensione che soffre, il gambo dovrebbe avere il diametro di un oncia e 22 centesimi di un' oncia; e per resistere alla compressione dovrebbe avere il diametro di un' oncia e 59 centesimi di un' oncia; il *faremo di diametro oncia 1,6*: o meglio al *pie de di once 2*, ed alla *cima di once 1,6*. O poco più per supplire al consumo dipendente dall' attrito del gambo contro le pareti del *collaro* e della *scatola a stoppa*.



CAPO III.

DELLA RESISTENZA RISPETTIVA.

108. Abbiassi un pezzo prismatico ; e sur esso agisca una forza con direzione tale , che ne incontri l'asse ad angolo retto.

Se è libero , obbedirà all'azione della forza e si metterà in moto. Non parimente se invincibilmente sostenuto da un suo estremo.

Supponiamo che sia orizzontale , rappresentato (*fig. 6.*) in proiezione verticale in *CDEG* , ed invariabilmente incastrato nel suo estremo *CD* : e così che gli elementi suoi longitudinali in *CD* si mantengano fermi al loro posto, senza poter prendere movimento progressivo , nè rotatorio , per qualunque forza che agisca sur esso. Sull' altro estremo *EG* agisca la forza *F* , di cui la direzione sia verticale , e ne tagli l'asse orizzontale.

La forza *F* tende a trascinar seco l'elemento estremo del pezzo ; ma che non può liberamente obbedirla , per essere attaccato all'elemento contiguo. Però l'elemento estremo prenderà un movimento *non in tutto progressivo* , *ma in parte rotatorio* , perciocchè deve inclinarsi , essendo trattenuto dal contiguo. Ed intanto quello agirà su questo , come la forza agiva su di esso. Ed in pari modo l'azione della forza si trasmetterà da elemento ad elemento , sino all'estremo *CD* , che si terrà saldo al suo posto e nella posizione orizzontale.

Dunque il pezzo , dalla sua posizione primiera *CDEG* , si piegherà in *CDE'G'* ; perciò che li suoi elementi si saranno inclinati l'uno all'altro. Nè si arresterà in questa sua nuova posizione , che quando *si saranno sviluppate tali forze intrinseche in esso , da equilibrare l'effetto della forza estrinseca F.*

109. Cessi di agire la forza *F*. Potrà avvenire , che a cagione delle forze intrinseche sviluppate , il pezzo ritorni

proprio al suo posto primiero, o che non vi torni. Nel primo caso la *elasticità rispettiva* dicesi *conservata*, nel secondo *alterata*. E se il pezzo resti fermo nella nuova posizione $CDE'G'$, la sua elasticità dicesi *perduta*.

Se le forze intrinseche sviluppate, non fossero capaci di equilibrare la forza F , il pezzo non si arresterebbe in $CDE'G'$, ma procederebbe oltre il suo moto e si romperebbe restandone una parte attaccata all'incastro CD , e l'altra obbedendo alla forza estrinseca F .

110. Quando il pezzo si piega, e quindi si ferma, si dice mettersene a cimento la *resistenza alla flessione*; quando pur si arresta nel moto, ma là *ove sarebbe per rompersi se per poco procedesse oltre*, dicesi mettersene a cimento la *resistenza alla rottura*.

Nel presente capitolo dunque, considereremo.

1.° Il caso in cui è mess' a cimento la *resistenza alla flessione*.

2.° Il caso in cui è mess' a cimento la *resistenza alla rottura*.

3.° Il modo di applicare le cose dette nei due precedenti articoli.

4.° Riepilogheremo ed applicheremo a degli esempj le cose esposte.

ARTICOLO I.

Caso in cui è mess' a cimento la resistenza alla flessione.

111. Supponiamo che il pezzo orizzontale $CDEG$ invincibilmente ed orizzontalmente (108) incastrato in CD , per l'azione della forza F verticale e che ne incontra l'asse, siasi piegato in $CDE'G'$, e quivi fermato *a cagione delle forze intrinseche sviluppatesi*. Nell'incastro in DC , mantenendosi orizzontali le fibre quivi poste, il pezzo, nella nuova posizione $CDE'G'$, si sarà fatto convesso dalla parte superiore e concavo dalla inferiore: e perciò le fibre superiori avranno dovuto allungarsi, le inferiori accorciarsi; e tra

esse dovrà stare un luogo ove le fibre non si saranno nè allungate nè accorciate. E perciocchè le fibre ugualmente lontane dalle più elevate proiettate in DE' debbono ugualmente allungarsi; e le altre ugualmente lontane dalle più basse proiettate in CG' , debbono ugualmente accorciarsi; il luogo delle fibre che non si allungano nè si accorciano, e che perciò dicesi *superficie neutrale*, sarà un cilindro ad elementi orizzontali, e la di cui sezione prodottavi da un piano ai suoi elementi normali, dicesi *curva di flessione* del pezzo, mentre ogni retta di esso, è detto *asse neutrale*, od anche *asse di equilibrio* della sezione normale all' asse del pezzo, che per essa retta passa.

Così se sia $OSsH'$ la proiezione della superficie neutrale, sarà essa stessa la curva di flessione che prende il pezzo $CDEG$, quando curvato in $CDE'G'$; e la retta orizzontale proiettata in S , che è una retta del cilindro o superficie neutrale, sarà l' asse neutrale o di equilibrio della sezione MN che passa per essa, e che è normale alla $OSsH'$.

Or le fibre verso la convessità non possono allungarsi senza essere potentemente tese, nè quelle verso la concavità accorciarsi, senza essere potentemente premute.

Dunque di esse fibre sarà mess'a cimento, per le prime la resistenza assoluta positiva, e per le seconde la resistenza assoluta negativa (4). E sono queste resistenze appunto, che fanno nascere nel pezzo delle forze intrinseche, capaci di neutralizzare l' effetto della forza F , per modo che da $CDEG$ curvatosi il pezzo in $CDE'G'$ quivi si ferma (108). Ed è evidente che in modo analogo, esse forze intrinseche neutralizzerebbero l' effetto di più forze verticali passanti per l' asse del pezzo, se, in vece di una sola F , più fossero quelle agenti su di esso.

E riconosceremo le relazioni tra esse forze intrinseche e le forze estrinseche, valutando quelle che si sviluppano nelle fibre del pezzo tra due sue sezioni consecutive qualunque, e ponendo le condizioni di equilibrio tra esse medesime forze intrinseche e le estrinseche.

E potremo valutare quelle forze, applicando i principii dei due Capi precedenti.

112. Ma quei principii non sono veramente fiduciali (18), (75), che quando li allungamenti od accorciamenti delle fibre sono piccolissimi: ed è palese che tanto più crescer deve l'allungamento delle fibre poste verso la convessità DE' e l'accorciamento di quelle poste verso la concavità CG' , per quanto più esse fibre sono lontane dalla superficie neutrale rappresentata in $OSsH'$, e per quanto più s'incurva il pezzo.

Dunque, per potere applicare le cose dette nei capi precedenti, supporremo

1.° che l'altezza del pezzo sia piccola rispetto alla sua lunghezza, cioè che la CD sia una frazione piccola di DE :

2.° che la curvità sua sia piccolissima, cosicchè piccolissimo sia l'abbassamento Hh dell'estremo del pezzo, rispetto alla sua lunghezza OH :

3.° supporremo in oltre, per speditezza di calcoli, che il pezzo sia simmetrico intorno al piano, del suo asse e della direzione della forza.

E queste ipotesi sono conformi alla più sana pratica.

113. Abbiamo veduto (13) che ogni pezzo lungo L , e di sezione A , se si allunga di l , sviluppa tal resistenza, da equilibrare una forza uguale ad

$$E_1 A \frac{l}{L};$$

e che se il medesimo pezzo, anzi che allungarsi si accorcia di l , sviluppa una resistenza (73) uguale ad

$$E_2 A \frac{l}{L}.$$

Nel caso in che siamo dunque, della flessione del pezzo, tutto riducesi a calcolare, per le diverse sue fibre che si allungano, o che si accorciano l'area A , ed il rapporto $\frac{l}{L}$.

Per fare ciò, consideriamo due sezioni (fig. 6.) consecutive del pezzo normali al suo asse, che supponiamo venute in MN , mn , normali alla curva di flessione, quando il pezzo dalla sua posizione primiera sarà venuto curvandosi in $CDE'G'$: ed è come se avessero rotate intorno alli assi neutrali S , s , prendendo sempre posizioni normali alla super-

ficie neutrale proiettata in $OSsH'$. E giunte in MN, mn convergeranno in una retta proiettata in R , centro del circolo osculatore in S della curva $OSsH'$. Le quali cose si vedono per chiarezza maggiore riportate più in grande nella fig. 7.^a

Arrestatosi il pezzo in $DE'G'C$; e le due sezioni consecutive, prese a considerare, in MN, mn , le fibre distanti per SA dalle neutrali, e che però passano tutte pel piano elementare proiettato in AB , si saranno proiettate in $ABba$.

Ma ove il pezzo non s'incurvasse le due sezioni si manterrebbero parallele, e tutte le fibre comprese tra esse sarebbero uguali ad Ss .

Dunque se per s meniamo la $m'n'$ parallela ad MN , otterghiamo nel triangoletto nsn' la proiezione degli allungamenti di tutte le fibre che son tese; nell'altro msm' la proiezione degli accorciamenti di tutte quelle che sono compresse: e sarà $aa'b'b$ l'aumento che effettivamente han subite le fibre proiettate in $ABba$.

Sia $\mu'\nu\mu$ la sezione trasversale del pezzo per S , e $Z'Z$ la intersezione sua colla superficie neutrale, ossia l'asse di equilibrio, e zz' quella col piano di simmetria. Se prendiamo la $\omega\alpha$ uguale ad SA , e la $\omega\beta = SB$, e meniamo le $\delta'\delta$, $\gamma'\gamma$ parallele alla $Z'Z$, avremo in $\gamma\delta\delta'\gamma'$ la sezione effettiva (proiettata in AB), di questo fascio di fibre ch'è proiettato in $ABba$, e che si allunga di $bb'a'a$.

Dunque, pel fascio di fibre che consideriamo, l'area A sarà il rettangolo elementare $\gamma\delta\delta'\gamma'$; ed il rapporto $\frac{l}{L}$ sarà il rapporto $\frac{aa'}{Ss}$, che pei triangoli simili $a'as$, sSR è uguale all'altro $\frac{sa'}{SR} = \frac{SA}{SR}$. E considereremo davvero due sezioni consecutive del pezzo, e generalizzeremo, esprimendo le dette cose analiticamente, e prendendo che Ss , sia la derivata dell'arco OS della curva $OSsH'$ terminato in S , e $\delta\gamma\gamma'\delta'$ la derivata dell'area $\mu'\nu\mu$ della sezione.

114. Pel punto O (fig. 6.) incontro della curva $OSsH'$ colla sezione CD d'incastro, ove essa curva è (108) oriz-

zontale, tiriamo la orizzontale Ox . Ed intendiamola riferita alle Ox , Oy : ed alle rette $Z'Z$, $z'z$ la curva $\mu'\mu$, che ne contorna la sua sezione in MN .

Facciamo

x, y = l'ascissa e l'ordinata di un punto individuato qualunque della curva di flessione:

s = l'arco di essa, a computare dal punto O e che si termina al punto individuato qualunque delle coordinate x, y :

c, h = l'ascissa e l'ordinata del punto estremo di essa curva:

z, Z = l'ascissa e l'ordinata di un punto individuato qualunque della curva della sezione:

α, β = le ascisse dei punti della sezione li più lontani dall'asse $Z'Z$.

Sarà evidentemente

$2Zz'$ = l'area A del fascio di fibre che sviluppano tutte la medesima resistenza assoluta, per essere tutte ugualmente tese,

$\frac{zy''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \text{il rapporto } \frac{l}{L} \text{ dell'allungamento } aa' \text{ della fibra } Ss$

ad essa medesima fibra; essendo che nel rapporto $\frac{SA}{SR}$, è SA uguale all'ascissa z dei punti della sezione proiettati in A , ed SR il raggio osculatore in S .

E qui, se considereremo, che essendo minima (112) la discesa totale h del punto H , rispetto all'ascissa c di esso medesimo punto; e che ad ogni accrescimento dell'ascissa debbe corrispondere un'accrescimento piccolissimo dell'ordinata; vedremo che la derivata y' dell'ordinata y che esprime appunto un tale rapporto, e molto più il quadrato suo debb'essere trascurabile rispetto all'unità. Quindi sarà

$$A = 2Zz', \text{ ed } \frac{l}{L} = zy''.$$

Dunque (113) avremo per le forze sviluppate da una serie di fibre che si allungano o si accorciano, tutte ugualmente lontane per z dall'asse neutrale

$$E_1 \cdot 2Zz' \cdot zy'', \quad E_2 \cdot 2Zz' \cdot zy''$$

Teor. delle Res.

13

ossia

$$2 E_1 y'' \cdot Z z z', \quad 2 E_2 y'' \cdot Z z z'$$

che agiscono in senso contrario; e pei momenti di esse forze rispetto alla retta S

$$2 E_1 y'' \cdot Z z^2 z'; \quad 2 E_2 y'' \cdot Z z^2 z'$$

coi quali tendono a far girare la sezione del pezzo nello stesso verso, perchè si rimetta nella sua posizione verticale.

E la somma di tutte le forze intrinseche sviluppate tra due sezioni qualunque sarà

$$2 E_1 y'' \int_0^{\alpha} Z z z', \quad 2 E_2 y'' \int_0^{\beta} Z z z'$$

e la somma di tutti i momenti delle stesse forze

$$2 E_1 y'' \int_0^{\alpha} Z z^2 z', \quad 2 E_2 y'' \int_0^{\beta} Z z^2 z'.$$

115. Troviamo ora i momenti delle forze estrinseche.

Riguardo alla forza F il suo momento, rispetto all'asse S , sarà

$$F(c-x):$$

e di simil forma quello di ogni altra forza estrinseca.

Se sul pezzo agiscano delle forze φ che vadano variando con legge di continuità, cosicchè sia φ funzione della distanza γ del suo punto di applicazione dalla origine O ; per l'elemento γ' potrà aversi come costante la φ , e quindi $\varphi\gamma'$ sarà la forza agente sur esso elemento; e

$$\varphi\gamma'(\gamma-x)$$

il suo momento rispetto all'asse S . E la somma dei momenti di tutte le loro forze φ , sarà

$$\int_x^c \varphi\gamma'(\gamma-x).$$

Onde, in generale, la somma dei momenti di tutte le forze estrinseche sarà

$$\int_x^c \varphi\gamma'(\gamma-x) + F(c-x) + F_1(c_1-x).$$

116. Trovate le forze intrinseche ed i momenti loro; e quelli delle forze estrinseche; avremo, in generale, le equazioni di equilibrio tra esse forze. E sono le due

$$(I) \quad E_1 \int_0^{\alpha} Z z z' = E_2 \int_0^{\beta} Z z z'$$

$$(II) \quad 2(E_1 \int_0^{\alpha} Z z^2 z' + E_2 \int_0^{\beta} Z z^2 z') y'' = \int_x^c \varphi\gamma'(\gamma-x) + z \cdot F(c-x)$$

la prima delle quali dicesi *equazione delle forze intrinsèque*, la seconda dei *momenti*.

* 117. A rigore non avremmo dovute prendere le forze effettive sviluppate dalle fibre, in vece le componenti loro parallele all' assi Ox , Oy . Ma se si rifletta, che per aversi le componenti parallele all' asse delle x avremmo dovuto moltiplicare esse forze pel rapporto

$$\frac{x'}{s'} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

e che per avere le altre parallele all' asse y avremmo dovute moltiplicarle pel rapporto

$$\frac{y'}{s'} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{y'^2}}}$$

ci avvedremo che bene stà come abbiám fatto; perciocchè, per le fatte ipotesi (112), il primo può ritenersi uguale all' unità, ed il secondo, come una quantità piccolissima. E che però per l'equilibrio delle forze parallele all' asse delle x , torneremmo ad avere la prima delle due equazioni di sopra; e per quello delle forze parallele all' asse delle y avremmo

$$p + 2y'y''(E_1 \int_0^x Zz z' - E_2 \int_0^y Zz z') = \int_x^c q\gamma' + \Sigma \cdot F,$$

esprimendo con p la risultante degli sforzi che si fanno dal pezzo contro le pareti dell'incastro. Ma in questa la quantità $y'y''$ essendo piccolissima, perchè uguale al rapporto della derivata dell'ordinata, al raggio osculatore (114) che è grandissimo, potrebbe pur aversi come trascurabile rispetto agli altri il termine che la contiene. D'altronde quest' ultima equazione valendo a renderci nota la p , non interessa le attuali nostre ricerche, riguardando noi l'incastro come invincibile.

118. Esaminiamo ora una per una le due equazioni dell'equilibrio. E cominciando dalla prima, osserviamo ch'è sempre indipendente dalla curva $OSsH'$ del pezzo; e che i due termini che la compongono sono costanti, finchè il pezzo è veramente prismatico, cioè finchè ha tutte sezioni identiche: e possono variare col valore dell'ascissa x , quando le sezioni variano da un luogo all'altro.

Quindi la prima equazione darà una relazione tra α e β ; e se chiamiamo a l'altezza del pezzo, avremo le due equazioni

$$(III) \quad E_1 \int_0^a Z z z' = E_2 \int_0^\beta Z z z', \quad a = \alpha + \beta$$

che serviranno a determinare la posizione dell'asse neutrale; o se fosse dato quest'asse dall'esperienza, varrebbero a far conoscere il rapporto $E_1 : E_2$ dei due moduli di elasticità.

Ed osserveremo che

$$1.^{\circ} \text{ se fosse } E_1 = E_2, \text{ sarebbe } \int_0^a Z z z' = \int_0^\beta Z z z'$$

e che però l'asse neutrale passerebbe pel centro di gravità della sezione del pezzo;

$$2.^{\circ} \text{ se fosse } E_1 > E_2, \text{ sarebbe } \int_0^a Z z z' < \int_0^\beta Z z z'$$

e l'asse neutrale starebbe tra il centro di gravità della sezione e la faccia convessa;

$$3.^{\circ} \text{ se fosse } E_1 < E_2, \text{ sarebbe } \int_0^a Z z z' > \int_0^\beta Z z z'$$

e l'asse neutrale starebbe in vece tra il centro di gravità della sezione e la faccia concava.

E di qui si vede che potrebbe ben avvenire, che per una certa flessione del pezzo fosse $E_1 = E_2$; mentre che per una altra fossero diverse queste due quantità: e potrebbe ciò avvenire, quando l'asse neutrale non si tenesse fisso nel medesimo luogo della sezione trasversale, ma si avvicinasse verso la convessità o verso la concavità: la qual cosa abbiamo modo da conoscere, come diremo appresso.

119. Nella equazione dei momenti, se il pezzo è veramente prismatico, cioè se ha sezioni identiche gli integrali nel primo membro si serberanno costanti; onde potremo fare

$$(IV) \quad 2(E_1 \int_0^a Z z^2 z' + E_2 \int_0^\beta Z z^2 z') = \epsilon$$

e quella equazione diventerà

$$(V) \quad \epsilon y'' = \int_x^c \gamma \gamma' (\gamma - x) + 2 \cdot F(c - x)$$

ove la ϵ è costante.

Dunque la *natura* della curva di flessione di un pezzo veramente prismatico è indipendente dalla sua sezione: dipende

solo dalle forze estrinseche. Dalla sezione ne dipendono i parametri.

La quantità ϵ dicesi *momento di elasticità*, perchè da essa essenzialmente dipende la somma dei momenti delle forze intrinseche, che si sviluppano appunto per la elasticità della materia di che è composto il pezzo.

120. Prendiamo il caso più semplice e più comune della pratica. Che è quello di un pezzo pesante, od uniformemente caricato di pesi, che sostenga dal suo estremo uno sforzo F verticale, che potrebb'essere anche un peso. In questo caso la γ sarà costante ed uguale al peso sull'unità di lunghezza, che chiamiamo Π , e vi sarà una sola F . E la equazione (V) diventa

$$2\epsilon y'' = \Pi(c^2 - 2cx + x^2) + 2F(c - x)$$

ossia

$$(VI) \quad 2\epsilon y'' = (\Pi c + 2F)c - 2(\Pi c + F)x + \Pi x^2.$$

Onde

$$(VII) \quad 2\epsilon y' = (\Pi c + 2F)cx - (\Pi c + F)x^2 + \frac{\Pi x^3}{3};$$

$$(VIII) \quad 2\epsilon y = (\Pi c + 2F)\frac{cx^2}{2} - (\Pi c + F)\frac{x^3}{3} + \frac{\Pi x^4}{12}$$

non essendo uopo di aggiungere costante; perciocchè (114) quando $x=0$, è anche $y'=0$, ed $y=0$.

E pertanto la curva di flessione sarà una parabola biquadratica: e tanto meno si scosterà dall'orizzontalità, per quanto più il momento ϵ di elasticità è grande: e viceversa.

121. Se si voglia l'abbassamento massimo dell'estremo del pezzo, ossia ciò che si chiama *freccia di curvatura*, faremo $x=c$ nella (VIII). Otterremo

$$(IX) \quad h = \frac{(3\Pi c + 8F)c^3}{24\epsilon}.$$

122. Se il pezzo non è carico di pesi uniformemente distribuiti; ma di un solo P sul suo estremo (lo che equivale al caso in cui il peso proprio del pezzo sia trascurabile rispetto al peso P di che è caricato) dovremo fare $\Pi=0$, ed $F=P$, ed otterremo

$$(X) \quad h_1 = \frac{Pc^3}{3\epsilon}.$$

123. Se è solo carico di pesi ugualmente ripartiti, e senza niun'altra forza o peso addizionale al suo estremo, dovremo fare $F=0$, e risulta

$$(XI) \quad h_2 = \frac{\pi c^4}{8s}.$$

E se si facesse che fosse $\pi c = P$, cioè che lo stesso peso P in vece di pendere dall'estremo del pezzo fosse ugualmente ripartito su tutta la sua lunghezza, avremmo

$$(XII) \quad h_2 = \frac{Pc^3}{8s}.$$

Onde $h_1 : h_2 :: 8 : 3$.

Dunque la freccia di curvatura che prende un pezzo prismatico, orizzontalmente incastrato da un estremo, sotto l'azione di un dato peso che ne pende dall'altro estremo (e tale che il peso del pezzo può trascurarsi rispetto ad esso), stà a quella che prende quando quel dato peso è uniformemente ripartito per tutta la sua lunghezza, come 8 stà a 3; cioè la seconda è i tre ottavi della prima.

In ambi i casi la freccia è proporzionale al rapporto $\frac{P}{s}$, del peso aggravante al momento di elasticità.

124. Abbiamo detto (119) che quando il pezzo ha sezioni identiche, la s è costante. Così essendo, poichè la h è proporzionale al rapporto $\frac{P}{s}$, crescerà proporzionalmente al peso P . Ed ove caricato un pezzo di un peso sempre crescente, la freccia h di curvatura non crescesse davvero proporzionalmente ai pesi, dovrebbe inferirsene che la s non è veramente costante per quel medesimo pezzo: e che però la quantità (IV)

$$s = 2(E_1 \int_0^a Z z^2 z' + E_2 \int_0^b Z z^2 z'),$$

comunque non varia da un luogo all'altro del pezzo, pur deve variare pel solo crescere del peso P .

Supponiamo che variino gli integrali. Perchè ciò avvenga, è necessario che a misura che si curva il pezzo l'asse neu-

trale cambii di sito da ciò solo potendo provenire la variazione degli integrali definiti quando il pezzo ha sezioni identiche.

Ma se varia la posizione dell'asse neutrale variano ancora gli altri integrali $\int_0^{\alpha} Z z z'$, $\int_0^{\beta} Z z z'$; e dalla (I) si ha

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\int_0^{\beta} Z z z'}{\int_0^{\alpha} Z z z'};$$

dunque se variano questi altri integrali variano ancora le E_1 , ed E_2 .

Dunque se varia la α varieranno ad un tempo non solo gli integrali che essa comprende, ma ancora i moduli E_1 , E_2 delle elasticità assolute.

Ma le nostre formole sono fiduciali (18, 75) fino a tanto che questi moduli, comunque ideali, sono costanti.

Dunque le equazioni e formole di questo Capo saranno fiduciali, finchè nei pezzi prismatici le discese dell'estremo del pezzo saranno proporzionali alla forza che il piega.

E potrà vedersi (123), se l'asse neutrale cangia di sito, osservando col fatto se in un medesimo pezzo prismatico la freccia variasse diversamente che in proporzione del peso di che è caricato.

125. Intanto, comunque i moduli E_1 ed E_2 sono o possono essere dissuguali pure il Navier, e con essi molti autori (anzi tutti per quanto io sappia) li assumono uguali. Noi pure così faremo: ma quindi vedremo quando possa giustificarsi tale ipotesi; e quali riguardi sia bene avere nelle applicazioni per questo. Nella quale ipotesi, fatto

$$(XIII) \quad E_1 = E_2 = E,$$

il momento di elasticità sarà

$$(XIV) \quad \epsilon = E \cdot 2 \left(\int_0^{\alpha} Z z^2 z' + \int_0^{\beta} Z z^2 z' \right) = EM$$

chiamando M ciò che moltiplica E , che dipende dalla sezione del pezzo, ed è indipendente dalla materia di che è composto; e che in sostanza è il momento d'inerzia della sezione valutato rispetto all'asse neutrale.

In questa ipotesi la equazione delle forze intrinseche sarà indipendente dalla E , cioè dal modulo di elasticità. Quindi in questa medesima ipotesi

- 1.° l'asse di equilibrio passerebbe davvero pel centro di gravità della sezione del pezzo :
- 2.° il momento di elasticità sarebbe proporzionale al momento d'inerzia della sezione.

Di qui si sono dedotti teoremi, li quali sono corollarii della teoria razionale dei momenti d'inerzia ; ma con ciò che abbiám detto si fa manifesto *quanto essi teoremi debbano esser accolti con circospezione ; e come anche in molti casi possano essere lungi dalla verità.*

126. Abbiamo fin qui supposto che il pezzo prismatico orizzontale, fosse pur orizzontalmente incastrato da un estremo.

Se in vece, per qualunque mezzo, fosse così incastrato da potersene avere li elementi nell'incastro, come inclinati all'asse delle x , ossia all'orizzonte, con angolo ω , pur nel medesimo modo si ragionerebbe ; e solo si definirà la primitiva della (VI) o della più generale (V) (derivata di second'ordine della equazione della curva di flessione), così che quando $x=0$, debb'essere $y'=\text{tang. } \omega$.

E con quel poco che abbiám detto, facendo le debite avvertenze, possiamo del pari considerare un pezzo, comunque appoggiato od incastrato.

* 127. Consideriamo un pezzo prismatico orizzontalmente (*fig. 8.*) posato sulli appoggi Q, R ; che essendo caricato di pesi distribuiti per tutta la parte compresa tra essi, ed anche di un peso addizionale che ne pende dal punto H , s'incurvi in QHR .

Tutt'i pesi distribuiti per sul pezzo, avranno una risultante, che passerà per un certo punto K distante dal punto di mezzo O per EA : e li appoggi Q ed R reggeranno il peso totale di che è gravato il pezzo. Facendo

$c=QR$, distanza delli appoggi, che prossimamente è uguale alla lunghezza del pezzo tra essi appoggi,

$m=AE$, distanza orizzontale della risultante di tutti i pesi distribuiti per sulla parte c del pezzo, dal suo mezzo O ,

$n=AD$, distanza orizzontale del punto di sospensione del peso addizionale dal medesimo punto O ,

x = ascissa { dei punti della curva di flessione riferiti alla orizzontale Hx , ed alla verticale Hy , menate pel punto H , onde pende il peso addizionale,
 y = ordinata {
 φ = la funzione che il peso distribuito per sul pezzo è della x ,
 P = il peso addizionale che pende da H ;
 il peso totale di che è aggravato il pezzo, sarà espresso da

$$\int_0^{c-a} \varphi(x) + \int_a^{c+n} \varphi(x) + P,$$

od anche più semplicemente da

$$\int \varphi(x) + P,$$

esprimendo col sommatorio addirittura la somma dei suddetti integrali definiti.

E la parte di peso totale retto dall'appoggio Q sarà

$$\frac{c+2m}{2c} \int \varphi(x) + \frac{c-2n}{2c} P$$

e quello retto dall'appoggio R sarà

$$\frac{c-2m}{2c} \int \varphi(x) + \frac{c+2n}{2c} P.$$

Quindi potremo avere rimossi li appoggi; purchè a quello Q sostituiamo una forza uguale al primo di questi pesi, ed all'altro R una uguale al secondo, ed entrambe agenti da sotto in sopra.

Ed il pezzo potrà considerarsi, come diviso in due parti incastrate in H , quivi rompendosi la continuità: l'una $HOKQ$ caricata di pesi φ , e sulla quale, in Q , agisce in senso contrario ad essi pesi la forza

$$F = \frac{c+2m}{2c} \int \varphi(x) + \frac{c-2n}{2c} P;$$

l'altra HsR pur caricata di pesi φ , e sulla quale in R , agisce in senso contrario ai pesi stessi, la forza

$$F = \frac{c-2m}{2c} \int \varphi(x) + \frac{c+2n}{2c} P.$$

Per le quali cose, applicando quì la equazione generale (V), avremo

per la porzione $QKOH$, la equazione

$$(XV) \quad y' = - \int_x^{c+a} \varphi y'(\gamma - x) + \left(\frac{c+2m}{2c} \int \varphi + \frac{c-2n}{2c} P \right) \left(\frac{c}{2} + n - x \right)$$

Teor. delle Res.

e per la porzione HsR , l'altra

$$(XVI) \quad \varepsilon y'' = - \int_x^{\frac{c}{2}-n} \varphi \gamma'(\gamma-x) + \left(\frac{c-2m}{2c} \int \varphi + \frac{c+2n}{2c} P \right) \left(\frac{c}{2}-n-x \right)$$

E la primitiva immediata di queste due equazioni, si determinerà colla condizione che nel punto H , considerato come incastro di ciascuna delle due porzioni del pezzo, le sue fibre, e quindi li elementi delle due curve di flessioni debbono essere ugualmente inclinate all'asse delle x : e la equazione integra, si definirà colla condizione che parimenti nel medesimo punto H le due curve debbono avere ordinata comune.

Si avrebbero così quattro equazioni tra la discesa DH , e la tangente dell'angolo che la tangente comune alle curve di flessione in H , fa coll'asse delle x . Dalle quali equazioni, troverebbonsi esse discesa, e tangente; e quindi eliminate queste due quantità da esse quattro equazioni, avrebbonsi anche due equazioni tra le coordinate variabili, che sarebbero le equazioni delle due curve di flessioni; l'una relativa alla porzione HOQ del pezzo, l'altra relativa alla porzione HsR : e da esse dedurrebbsi il ventre massimo del pezzo.

* 128. Se il peso φ , distribuito per tutta la lunghezza del pezzo, non variasse con continuità da un punto ad un'altro, ma fosse costante; e così che per ogni unità di lunghezza della QR , gravitasse sul pezzo il peso Π ; allora la risultante di tutti questi pesi passerebbe non più per un certo punto K , ma pel punto di mezzo O del pezzo. Quindi sarebbe $f_{\varphi}(x) = \Pi c$, ed $m=0$; e le equazioni ultime (dopo integrati i momenti dei pesi Π , ordinatele secondo le potenze crescenti delle x , e fatte le riduzioni) si cangerebbero, per la parte HOQ , in

$$(XVII) \quad 2\varepsilon y'' = \left(\frac{c^2}{4} - n^2 \right) \left(\frac{\Pi c + 2P}{c} \right) - \left[P - \frac{2n}{c} (\Pi c + P) \right] x - \Pi x^2$$

e per la parte HsR

$$(XVIII) \quad 2\varepsilon y'' = \left(\frac{c^2}{4} - n^2 \right) \left(\frac{\Pi c + 2P}{c} \right) - \left[P + \frac{2n}{c} (\Pi c + P) \right] x - \Pi x^2$$

E nel rimanente opererebbsi, come è detto di sopra (127).

* 129. Se in vece del peso addizionale P agente in H , quivi fosse un peso Π_1 , distribuito uniformemente pel breve tratto Ss , che chiamiamo S_1 ; in vece di considerare il peso P applicato in H , dovremmo considerarvi la risultante $S_1 \Pi_1$, di tutti essi pesi Π_1 , applicata nel punto di mezzo H dell'arco Ss : e baste-

rebbe porre nelle due ultime equazioni in vece di P la $\Pi_1 S_1$: e quanto può dirsi pel caso precedente, varrà anche per questo.

* 130. Se il peso P , stasse nel mezzo O del pezzo, o l'arco S_1 prendesse immetto questo medesimo punto, avrebbonsi casi particolari dei due precedenti; e le trovate equazioni si accomoderebbero a tali casi, ponendovi la distanza $AD=n=0$.

Le due ultime equazioni relative al caso in cui i pesi φ non sono variabili, ma costanti, ed uguali a Π per ogni unità della lunghezza c , si cambieranno allora in una sola e medesima.

$$2y'' = (\Pi c + 2P) \frac{c}{A} - Px - \Pi x^2$$

onde le due metà del pezzo s'incurverebbero secondo due curve perfettamente identiche, situate simmetricamente intorno alla OA .

Ciò ha luogo, perchè essendo $n=0$, il peso addizionale P cadendo in O , e quivi pure l'origine delle coordinate, tutto si fa simmetrico intorno alla verticale AO .

Per la quale considerazione, la precedente può con più brevi calcoli dedursi, cominciando addirittura il ragionamento da capo pel caso, cui si riferisce.

131. Un pezzo prismatico orizzontale (fig. 9) posato su due appoggi Q, R , caricato uniformemente di pesi π per ciascuna unità di lunghezza della parte intercetta tra li appoggi, e da un peso addizionale P , che ne pende dal mezzo, siasi incurvato in QOR , e quivi fermato.

Il pezzo, essendo prismatico, e le forze che agiscono su esso tutte simmetricamente distribuite dalle due parti della yOP ; simmetrica dovrà essere del pari intorno alla retta yOP la curva di flessione. Però gli elementi delle due curve OQ a sinistra, ed OR a destra dell'asse dovranno essere orizzontali in O . Quindi potremo considerare ciascuna metà del pezzo come orizzontalmente incastrata in O : e tutto si riduce a determinare le forze e loro momenti, che in questo caso debbono sostituirsi nella equazione generale (V).

Assumiamo O ad origine delle coordinate, e la orizzontale Ox , e la verticale Oy ad assi coordinati. Facciamo c =la distanza QR delli appoggi
 $h=HO$, ventre del pezzo

π = il peso di che è aggravato il pezzo per ciascuna unità della lunghezza QR

P = il peso addizionale, posto nel mezzo O del pezzo.

Sarà πc la risultante di tutt' i pesi, la quale agirà sul punto di mezzo O del pezzo. Quindi può aversi stare quivi il peso $\pi c + P$

Scomponiamo questa forza in due, applicate ai punti Q , R . Sarà ciascuna componente

$$\frac{1}{2}(\pi c + P)$$

Ma sono li appoggi Q , R , che sostengono il pezzo così caricato di pesi.

Dunque potremo rimuoverli, purchè in Q ed R , porremo due forze dirette in senso contrario all'azione della gravità e ciascuna uguale $\frac{1}{2}(\pi c + P)$. Quindi il semipezzo OR sarà, come orizzontalmente incastrato in O , caricato uniformemente di pesi π per tutta la sua lunghezza (e che prenderemo negativi perchè agenti in senso contrario delle ordinate y positive), ed in oltre soggetto ad una forza $F = \frac{1}{2}(\pi c + P)$ agente in R alla distanza $\frac{1}{2}c$ dall'incastro.

Dunque nel secondo membro della (V) dovremo porre per γ la $-\pi$, per F la $\frac{1}{2}(\pi c + P)$, per c la distanza $\frac{c}{2}$: ed otterremo, dopo integrati i momenti della $-\pi$ ed ordinato rispetto ad x

$$(XIX) \quad 2ay'' = \frac{c}{4}(\pi c + 2P) - Px - \pi x^2$$

la primitiva della quale darà la curva di flessione. O più speditamente potremo addirittura fare i detti cambiamenti nella (VIII).

Risulta

$$(XX) \quad 4ay = \left(\frac{\pi c}{2} + P \right) \frac{cx^2}{2} - P \frac{x^3}{3} - \frac{\pi x^4}{6} :$$

e per la freccia o ventre

$$(XXI) \quad h = \frac{(5\pi c + 8P)c^3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot a}$$

132. Se il pezzo fosse carico del solo peso P , sarebbe $\pi=0$, e verrà

$$(XXII) \quad h_1 = \frac{1}{16} \cdot \frac{Pc^3}{3a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P(c/2)^3}{3a}$$

E se non sostenesse il peso addizionale P , ma solo i pesi n distribuiti uniformemente per la lunghezza c , dovremo nella (XXI) fare $P=0$; e verrà

$$(XXIII) \quad h_2 = \frac{5}{48} \cdot \frac{n c^4}{8s} = \frac{5}{3} \cdot \frac{n (\frac{c}{2})^4}{8s}$$

Dunque

1.° Un pezzo prismatico sostenuto da due appoggi orizzontali, gravato nel mezzo da un peso, prende una freccia, pari alla sedicesima parte di quella che prenderebbe (122) se fosse incastrato orizzontalmente in un estremo e gravato nell' altro dallo stesso peso: e se il primo pezzo ha la doppia lunghezza del secondo, quello prende una freccia metà di quella che prende questo.

2.° Un pezzo prismatico sostenuto da due appoggi orizzontali, gravato da pesi uniformemente distribuiti pella distanza di essi appoggi, prende una freccia pari ai $\frac{5}{48}$ di quella (123) che prenderebbe il medesimo pezzo, se parimenti caricato, fosse orizzontalmente incastrato in un solo estremo: e se il primo avesse la doppia lunghezza dell' altro, gravati di pari pesi per ogni unità della lunghezza orizzontale, il primo prenderebbe una freccia i $\frac{5}{3}$ di quella che prende l' altro.

133. Supponiamo ora che quel peso n_c , ch' è uniformemente distribuito per tutta la distanza c delli appoggi, sia quel medesimo peso P che ne pendeva dal mezzo.

La formola (XXIII) postovi $n_c=P$ diventa

$$h_2 = \frac{5}{16.8} \cdot \frac{P c^3}{3s}$$

Onde sarà (XXII)

$$h_1 : h_2 :: 8 : 5$$

Dunque il ventre che prende un pezzo prismatico sostenuto da due appoggi orizzontali, sotto l' azione di un dato peso che ne pende dal suo mezzo, stà a quello che prende, quando quel medesimo peso è uniformemente ripartito tra li appoggi, come 8 stà a 5: cioè il secondo è li $\frac{5}{8}$ del primo.

134. Dalla forma del valore di h_1 (XXII) si fa manifesto, che anche quando un pezzo prismatico di peso trascurabile rispetto a quello unico che lo aggrava, è sostenuto da due appoggi orizzontali equidistanti dalla direzione del peso gravante, la freccia di curvatura, ossia ventre del pezzo è proporzionale al rapporto $\frac{P}{c}$, e quindi al peso aggravante P , essendo nei pezzi di sezioni identiche la c costante (119); quindi qui possono ripetersi, e valgono i ragionamenti medesimi fatti al num. 124.

* 135. Il precedente problema diventerebbe più complicato, se si volessero considerare in un modo razionale, e prescindendo dalli usi pratici, le resistenze estrinseche, o forze che si sviluppano, quando il pezzo appoggiato s' incurva.

Se il pezzo preme contro li appoggi, e viceversa questi su quello, l'effetto veramente meccanico delli appoggi, non è lo stesso che quello (fig. 9) di due forze (131), ciascuna uguale ad $\frac{1}{2}(\Pi c + P)$ agenti in Q ed R da sotto in sopra e parallele all' asse Oy ; ma di due forze (fig. 10) normali alla curva di flessione in Q ed R , capaci di equilibrare tutti i pesi Πc e P . In oltre perchè, piegandosi il pezzo, la lunghezza effettiva QOR tra li appoggi si fa maggiore della distanza $QR=c$ di essi; è necessario che li elementi del pezzo in Q ed R , striscino sulli appoggi: e però se tali elementi sono premuti da essi, quivi si svilupperanno li attriti.

Lo stato razionalmente meccanico per ciascuna metà del pezzo dunque, si è quello di un pezzo incastrato in O , e su del quale agiscono le tre forze seguenti: cioè

1° i pesi uniformemente distribuiti pella lunghezza $\frac{c}{2}$, e di cui Π rappresenta quelli che gravitano sull' unità di lunghezza:

2° una forza agente in R normalmente alla curva di flessione, che coll' altra uguale agente in Q , debbono fare equilibrio al peso totale $\Pi c + P$:

3.° una forza agente in R , secondo la tangente alla curva di flessione, dovuta all' attrito, e che tende ad impedire lo strisciare dell' elemento del pezzo per su l' appoggio in R .

Vediamo quale sarebbe la equazione di equilibrio, quando volessero considerarsi tutte queste cose.

* 136. Intendiamo menate le normali alla curva di flessione in Q ed R . Tutto essendo simmetrico intorno alla verticale Oy ,

queste normali concorreranno in un qualche punto della Oy . Sia A un tal punto.

Il peso totale $(\Pi c + P)$, che può aversi come riunito in O , abbiassi come applicato in A ; e quindi risoluto in due forze secondo AQ , AR . E sono uguali a

$$\frac{-(\Pi c + P)}{2 \cos. QAO};$$

ossia (esprimendo con x'_c, y'_c, s'_c , le derivate delle x, y, s ,

quando la variabile indipendente $x = \frac{c}{s}$).

$$-\frac{1}{2}(\Pi c + P) \frac{s'_c}{x'_c \frac{c}{s}}.$$

Quindi li appoggi Q ed R saranno spinti in fuori dal pezzo, con tanta forza secondo le direzioni AQ , AR : e li attriti che si svilupperanno saranno uguali a

$$-\frac{1}{2}f(\Pi c + P) \frac{s'_c}{x'_c \frac{c}{s}}.$$

Dunque le forze che agiscono sul semipezzo OR , che può aversi come incastrato in O , sono il peso Π sopra ogni unità della lunghezza $\frac{c}{2}$; la forza

$$F_1 = \frac{1}{2}(\Pi c + P) \frac{s'_c}{x'_c \frac{c}{s}}$$

agente secondo la normale RA , da R verso A : e l'altra

$$F_2 = \frac{1}{2}f(\Pi c + P) \frac{s'_c}{x'_c \frac{c}{s}}$$

agente secondo la tangente alla curva di flessione in R , da R verso T .

Quindi avremo le forze ad esse equivalenti, agenti secondo li assi coordinati. E sono (assumendo la x , come variabile indipendente): parallela all'asse delle x

$$-\frac{1}{2}(\Pi c + P) y'_c + \frac{1}{2}f(\Pi c + P):$$

parallela all'asse delle y

$$\frac{1}{2}(\Pi c + P) + \frac{1}{2}f(\Pi c + P) y'_c.$$

E se consideriamo una sezione qualunque in S , corrispondente alle coordinate x, y ; le distanze di queste due ultime forze,

da essa sezione, sono

per la prima $h-y$

per la seconda $\frac{c}{2}-x$.

Quindi i momenti delle notate due forze estrinseche saranno

$$\frac{1}{2}(\Pi c+P)(f-y'_c)(h-y)$$

$$\frac{1}{2}(\Pi c+P)(f y'_c+1)(\frac{c}{2}-x).$$

E la equazione di equilibrio da sostituire la (V) sarà la

$$(XXIV) \quad \pi y'' = - \int_x^{\frac{c}{2}} \Pi \gamma'(\gamma-x) \\ + \frac{1}{2}(\Pi c+P) [(f-y'_c)(h-y) + (f y'_c+1)(\frac{c}{2}-x)].$$

* 137. Ma per le *necessarie ipotesi* fatte (112), e le quali *sono conformi alla pratica*, la y' debbe sempre mantenersi piccolissima e trascurabile rispetto all'unità, e tale pure la h rispetto alla $\frac{c}{2}$: in oltre il coefficiente dell' attrito è sempre una frazione.

Dunque il prodotto $f y'_c$ può aversi (stando a quelle ipotesi) come trascurabile in fronte all'unità: ed il momento delle forze estrinseche (che sono l'effetto delli appoggi e della flessione) divenuto

$$\frac{1}{2}(\Pi c+P) [(\frac{c}{2}-x) + (f-y'_c)(h-y)]:$$

e potendosi avere ancora la $h-y$ comparativamente piccola rispetto alla $\frac{c}{2}-x$, si fa manifesto, potersi trascurare il secondo termine nella parentesi quadra, rispetto al primo.

Quindi ritorna la

$$\pi y'' = - \int_x^{\frac{c}{2}} \Pi \gamma'(\gamma-x) + \frac{1}{2}(\Pi c+P) \left(\frac{c}{2}-x \right)$$

onde nasce appunto la (XIX).

E però si rende palese, in quali casi, stando proprio al rigore matematico, possono valere le cose dette nei numeri precedenti. Ed essi *rispondono* appunto a quelli della *più sana pratica*.

Auzi è da osservare, che quando quelle ipotesi (112) non avessero luogo, non potremmo neppure fare il primo membro della equazione di equilibrio (XIX) uguale a $2\pi y''$; ma dovrebbe restare

il raggio osculatore nel suo pieno valore (114, 117); ed in oltre le forze intrinseche ed il loro momento potrebbero aberrare (18) dalla proporzionalità al rapporto $\frac{zy''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ della distanza di cia-

scuna fibra dall' asse neutrale, al raggio osculatore della curva di flessione. Onde, se volendo stare al più stretto rigore matematico, volesse ritenersi nella equazione di equilibrio alla flessione, per intero il secondo membro della (XXIV), dovrebbe cangiarsene

ancora il primo, che dovrebbe essere $\frac{s}{r}$ (essendo r il raggio osculatore); ma ove s potrebbe dipendere da legge diversa da quella data dalla (IV). Egli è per le difficoltà che s' incontrerebbero, volendo così trattar la questione; ed anche pei riguardi da aversi alla pratica, che *generalmente* si considerano i pezzi appoggiati, come abbiamo fatto nei cinque numeri precedenti.

E vedesi che simili ragionamenti varrebbero ancora pei casi più generali contemplati dal num. 127 al 130; e sarebbero a fare pure per altri casi dei quali alcuni vedremo appresso (a).

* 138. I casi precedenti, si sono ridotti al più semplice (120): di una sola forza F agente all' estremità del pezzo, oltre a quelle distribuite con continuità per tutta la sua lunghezza.

Quando le forze F , sono più, come è espresso in generale nella (V), il pezzo esaminerasi a parte a parte, considerandone successivamente ciascuna porzione compresa tra due punti conse-

(a) Il Navier, trattando il caso della rottura, comunque non tenga conto delli attriti sviluppati sulli appoggi Q ed R , pure considera le forze normali agenti secondo QA , ed RA , come equivalenti ad essi appoggi. Ma valuta la y'_c indipendentemente da queste medesime forze; e come se non vi fossero esse, ma in vece le due $\frac{P}{2}$ ($HC+P$), parallele all' asse delle y . La qual cosa se sia sconvenevole ognun vede.

La y'_c dovrebb' essere valutata coi medesimi riguardi, e nella stessa ipotesi nella quale si tratta il caso della rottura: la qual cosa potrebbe farsi per la medesima (XXIV); perciocchè la primitiva immediata di essa darebbe il valore della y'_c ; e la primitiva di second' ordine darebbe il valore di h . Li quali valori, sarebbero poi da sostituirsi nella equazione relativa alla rottura.

Teor. delle Res.

ativi di applicazione di esse forze; le quali debbono romperne la continuità della curva.

Sia il pezzo orizzontale (fig. 11.) incastrato in Q ; ed ai suoi punti A, B, D, I , agiscano le forze F, F_1, F_2, F_3 verticali; e distante l'una dall'altra per

$$QA=k, AB=k_1, BD=k_2, DI=k_3,$$

e così le rispettive loro distanze dall'incastro Q , saranno

$$k, k+k_1, k+k_1+k_2, k+k_1+k_2+k_3.$$

Assumiamo il punto Q ad origine delle coordinate; la orizzontale Qx ad asse delle x , e la verticale Qy ad asse delle y , computando le y da sotto in sopra.

Si considera prima la parte QA del pezzo; e si avrà la (V) compiuta: cioè

$$\begin{aligned} \text{(XXV)} \quad y' = & \int_x^{k+k_1+k_2+k_3} -\varphi\gamma'(\gamma-x) \\ & + F(k-x) \\ & - F_1(k+k_1-x) \\ & + F_2(k+k_1+k_2-x) \\ & - F_3(k+k_1+k_2+k_3-x) \end{aligned}$$

Dopo si considererà la porzione successiva AB , come incastrata in A ; e si avrà la (V) mancante del primo momento sotto la Σ . Sarà cioè

$$\begin{aligned} \text{(XXVI)} \quad y' = & \int_x^{k+k_1+k_2+k_3} -\varphi\gamma'(\gamma-x) \\ & - F_1(k+k_1-x) \\ & + F_2(k+k_1+k_2-x) \\ & - F_3(k+k_1+k_2+k_3-x) \end{aligned}$$

Quindi la terza porzione BD , si avrà come incastrata in B ; e nella (V) mancheranno i due primi momenti sotto la Σ . E sarà

$$\begin{aligned} \text{(XXVII)} \quad y' = & \int_x^{k+k_1+k_2+k_3} -\varphi\gamma'(\gamma-x) \\ & + F_2(k+k_1+k_2-x) \\ & - F_3(k+k_1+k_2+k_3-x) \end{aligned}$$

E similmente per la quarta porzione DI del pezzo, si avrà

$$\begin{aligned} \text{(XXVIII)} \quad y' = & \int_x^{k+k_1+k_2+k_3} -\varphi\gamma'(\gamma-x) \\ & - F_3(k+k_1+k_2+k_3-x) \end{aligned}$$

E saranno, in generale, tante equazioni, quante sono forze isolate. E s'integreranno, considerando prima che nel punto Q la y' dedotta dalla (XXV), debbe corrispondere alla tangente dell'angolo d'inclinazione della parte estrema Q dell'incastro all'asse delle x , e che la y dedotta da essa medesima equazione debb'esse-

sere zero; e poi considerando, che esse equazioni, essendo tutte relative a parti di un solo e medesimo pezzo; per rispetto al punto *A*, le (XXV), e (XXVI), debbono dare lo stesso valore per y' ed y ; rispetto al punto *B*, le (XXVI) e (XXVII) debbono pur dare un medesimo valore per y' ed y ; e che parimenti pel punto *D* lo stesso valore per y' ed y , debbono dare le (XXVII), e (XXVIII).

Di qui è, che due casi bene distinti possono aver luogo, secondo ciascuno dei quali, diversamente possono impiegarsi quelle equazioni, le loro primitive, e le altre che possono provenirne.

Il primo caso, si è quello in cui tutte le forze sono date:

Il secondo caso, si è l'altro in cui esse forze, non essendo tutte date, possono assumersi ad arbitrio certi particolari valori delle y' ed y .

* 139. Nel primo caso, le costanti arbitrarie che si presentano nelle integrazioni, saranno per le dette condizioni determinate; e si avranno, se n sono le forze staccate, n equazioni finite.

* 140. Nel secondo caso, per le dette condizioni (dipendenti dal fatto, di dovere appartenere ad un solo e medesimo pezzo le varie parti alle quali si riferiscono le ultime equazioni scritte di sopra) avremo modo da determinare così, le forze da applicarsi sul pezzo, da produrvi certi determinati effetti in rapporto colla sua flessione.

Così se chiamiamo

a ed a' i valori che vogliamo abbia l'ordinata e derivata sua, rispetto al punto *A* corrispondente all'ascissa $x=k$:

b , b' i valori che vogliamo abbia l'ordinata e sua derivata in *B*, che corrisponde all'ascissa $x=k+k_1$:

d , d' quelli che vogliamo abbiano in *D* corrispondenti all'ascissa $x=k+k_1+k_2$

E chiamiamo

A, *B*, *D*, *I*

i polinomi dei secondi membri delle primitive delle (XXV), (XXVI), (XXVII), (XXVIII) divisi per s . Avremo le equazioni (XXIX)

$$\begin{array}{ll} a' = A'_k & , \quad a = A_k \\ a' = B'_k & , \quad a = B_k \\ b' = B'_{k+k_1} & , \quad b = B_{k+k_1} \\ b' = D'_{k+k_1} & , \quad b = D_{k+k_1} \\ d' = D'_{k+k_1+k_2} & , \quad d = D_{k+k_1+k_2} \\ d' = I'_{k+k_1+k_2} & , \quad d = I_{k+k_1+k_2} \end{array}$$

e saranno $4(n-1)$ di numero, se n è il numero delle forze isolate; dalle quali equazioni, insieme con altre, dipendenti dalle relazioni tra le sole forze estrinseche, note ed ignote (relazioni nascenti dalla questione), potremo determinare, per via delle cose date, le forze ignote, ed altre quantità che pure non sono date dapprima: e potremo riconoscere pure, dal numero di esse, se per verificarsi certe condizioni possono o nò esser date tutte le forze estrinseche; o quante possano esserne date.

E si fa palese potersi proporre per questo molti belli ed importanti problemi diversi.

* 141. Intanto se i pesi φ fossero tali da essere costanti, ed uguali a Π , per ogni unità di distanza orizzontale dallo incastrato in Q , il momento di tutti essi pesi, verrebbe, dopo la integrazione tra li espressi limiti e tutte le riduzioni che si presentano, espresso da

$$\int_x^{k+k_1+k_2+k_3} \varphi y'(\gamma-x) = \frac{\Pi}{2} (k+k_1+k_2+k_3-x)^2$$

e questa espressione dovrebbe porsi per primo termine nel secondo membro di ciascuna delle equazioni (XXV), (XXVI), (XXVII) e (XXVIII).

* 142. Per dare un qualche esempio di applicazione dell'esposto metodo, prendiamo a risolvere uno dei più semplici problemi, tra li tanti che si potrebbero proporre, e ch'è ad un tempo importante pelle conseguenze pratiche che se ne cavano. Consideriamo una trave (fig. 12.) uniformemente caricata di pesi, ovvero pesante $A'A$, orizzontale ed orizzontalmente incastrata in A' ed A , e caricata in oltre di un peso addizionale P in un qualche suo punto O .

La trave, pel carico che soffre, si piegherà alquanto; e l'effetto degli incastrati orizzontali in A ed A' , sarà quello di dovere la curva di flessione avere in ciascuno di questi punti un elemento orizzontale, ed ambi allo stesso livello. Potremo dunque avere rimossi gl' incastrati, purchè vi sostituiremo tali forze estrinseche da produrre il detto effetto. Però se considereremo prolungato il pezzo per AB , da una parte, e per $A'B'$ dall'altra; ne considereremo la parte OAB , come incastrata in O , e come se agissero su di essa due forze, l'una F agente da sotto in sopra in A , e l'altra F_1 , agente da sopra in sotto in B ; e l'altra $OA'B'$, come incastrata pure in O , e come se vi agissero la forza φ

agente da sotto in sopra in A' e l'altra φ_1 agente da sopra in sotto in B' ; le cose saranno le stesse come se il pezzo fosse incastrato dai due estremi, purchè fossero tali esse forze $F, F_1, \varphi, \varphi_1$.

1.° da fare equilibrio al peso della trave ed al peso addizionale P :

2.° da fare che il pezzo prenda tali curve di flessioni, da stare i punti loro in A ed A' allo stesso livello, e quivi li elementi loro orizzontali.

Consideriamo dunque così tutto il pezzo: assumiamo la orizzontale Ox menata per O , ad asse delle x , la verticale Oy ad asse delle y ; e chiamiamo il ventre $HO=h$, ed ω chiamiamo l'angolo che la tangente alla curva al punto O fa coll'asse delle x .

Per applicare immediatamente le equazioni del numero precedente; osserviamo: che in quanto alli momenti del peso Π uniformemente distribuito, dobbiamo sopprimervi tutte le k numerate, potendosi non tener conto del peso negli incastri, o meglio non si potendo quivi caricare di pesi Π : che essendo due le forze due debbono essere le equazioni cioè le sole (XXV) e (XXVI): e che in esse dobbiamo sopprimervi le k_2 e k_3 . Anzi basterà la sola equazione (XXV), non essendo necessario conoscere la curva di flessione dei prolungamenti ideali $AB, A'B'$ del pezzo.

Avremo pertanto in vece della (XXV), la equazione seguente, che s'è ordinata secondo le potenze crescenti della x : cioè la

$$(XXX) \quad \varepsilon y'' = -\frac{\Pi k^2}{2} + Fk - F_1(k+k_1) + (\Pi k - F + F_1)x - \frac{\Pi x^2}{2}$$

La quale integrata così, che quando $x=0, y'=\text{tang. } \omega$, ed $y=0$, porge

$$\varepsilon y' = \text{tang. } \omega - \left[\frac{\Pi k^2}{2} - Fk + F_1(k+k_1) \right] x + (\Pi k - F + F_1) \frac{x^2}{2} - \frac{\Pi x^3}{6}$$

$$\varepsilon y = x \text{ tang. } \omega - \left[\frac{\Pi k^2}{2} - Fk + F_1(k+k_1) \right] \frac{x^2}{2} + (\Pi k - F + F_1) \frac{x^3}{6} - \frac{\Pi x^4}{24}$$

E parimenti facendo per la parte $OA'B'$ a sinistra di Oy ; avremo per la porzione OA' e per le medesime ragioni, le equazioni (indicando con lettere greche le quantità analoghe alle soprascritte)

$$(XXXI) \quad \varepsilon y'' = -\frac{\Pi \eta^2}{2} + \varphi \eta - \varphi_1(\eta+\eta_1) + (\Pi \eta - \varphi + \varphi_1)x - \frac{\Pi x^2}{2}$$

$$\varepsilon y' = -\varepsilon \text{ tang. } \omega - \left[\frac{\Pi \eta^2}{2} - \varphi \eta + \varphi_1(\eta+\eta_1) \right] x + (\Pi \eta - \varphi + \varphi_1) \frac{x^2}{2} - \frac{\Pi x^3}{6}$$

$$\varepsilon y = -x \text{ tang. } \omega - \left[\frac{\Pi \eta^2}{2} - \varphi \eta + \varphi_1(\eta+\eta_1) \right] \frac{x^2}{2} + (\Pi \eta - \varphi + \varphi_1) \frac{x^3}{6} - \frac{\Pi x^4}{24}$$

* 143. Per le sopradette cose, in O debb' essere $y=0$, ed $y'=tang.\omega$; ed in A ed A' , $y=h$, $y'=tang.\pi=0$. Dunque nella seconda delle (XXX), se faremo $x=k$, dovremo farvi $y'_1=0$, e la equazione risultante equivarrà (140) alla $\alpha'=A'_1$ delle (XXIX); e nella terza di esse medesime equazioni, se faremo pure $x=k$, dovremo farvi $y=h$; e la risultante equivarrà alla $\alpha=A_1$ delle (XXIX). E lo stesso avverrà per la 2^a e 3^a delle (XXXI).

Avremo dunque le quattro equazioni seguenti

$$\begin{aligned} (XXXII) \quad 0 &= 6 \cdot tang.\omega - \pi k^3 + 3Fk^2 - 3F_1 k(k+2k_1) \\ 24 \cdot h &= 24k \cdot tang.\omega - 3\pi k^4 + 8Fk^3 - 4F_1 k^2(2k+3k_1) \\ 0 &= 6 \cdot tang.\omega - \pi v^3 + 3\tau v^2 - 3\tau_1 v(v+2v_1) \\ 24 \cdot h &= -24k \cdot tang.\omega - 3\pi v^4 + 8\tau v^3 - 4\tau_1 v^2(2v+3v_1) \end{aligned}$$

e queste sono le equazioni dipendenti dall'incurvarsi del pezzo.

Ne avremo altre due, dipendenti dalla considerazione delle sole forze estrinseche, da che esse forze debbono tutt'insieme farsi equilibrio senza di che la trave potrebbe prendere un moto progressivo o rotatorio, od entrambi, comunque ad un tempo pur si piegasse. E sono le

$$\begin{aligned} (XXXIII) \quad \pi(k+v) + P + F_1 + \tau_1 &= F + \tau \\ \frac{-\pi k^2}{2} + Fk - F_1(k+k_1) &= \frac{-\pi v^2}{2} + \tau v - \tau_1(v+v_1). \end{aligned}$$

Ed abbiamo così sei equazioni simultanee, dalle quali potremo cavare le forze o meglio pressioni F , F_1 , τ , τ_1 , che si esercitano dalla trave contro le pareti dell'incastro, la discesa h del punto onde pende il peso P , ed anche l'inclinazione alla orizzontale degli elementi della curva nel medesimo luogo onde pende il peso P . Sostituiti nelle (XXX e XXXI) i valori di F , F_1 , τ , τ_1 , che si saranno trovati, avremo le equazioni finite delle curve di flessione.

* 144. Se il peso P pendesse dal mezzo del pezzo (fig. 13), sarebbe $k=v_1$; e se facciamo $k_1=v_1$, tutto sarà lo stesso così a destra, come a sinistra della verticale Oy , e sarà $tang.\omega=0$.

Quindi è facile vedere, che allora la equazione dei momenti delle forze estrinseche che è la seconda delle (XXXIII) si verifica da se; e che le equazioni determinatrici delle pressioni negli

incastri, e della discesa del punto di mezzo della trave, saranno

$$\begin{aligned} \text{(XXXIV)} \quad 0 &= \pi k^2 + 3Fk - 3F_1(k + 2k_1) \\ 24sh &= 3\pi k^4 + 8Fk^3 - 4F_1k^2(2k + 3k_1) \\ 2F &= 2\pi k + P + 2F_1. \end{aligned}$$

La prima e terza di queste porgono.

$$\begin{aligned} F &= \frac{4\pi k(k + 3k_1) + 3P(k + 2k_1)}{12k_1} \\ F_1 &= \frac{k(4\pi k + 3P)}{12k_1}. \end{aligned}$$

Li quali valori, sostituiti nella seconda, porgono pel ventre della trave

$$h = \frac{k^3}{24s}(\pi k + P).$$

Se per paragonare questo ventre con quello che prenderebbe la trave medesima (131) se fosse appoggiata, anzi che incastrata, facciamo $2k=c$, distanza delli appoggi o dei labri degli incastri, avremo

$$\text{(XXXV)} \quad h = \frac{(\pi c + 2P)c^3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot s}.$$

E paragonando questa formola colla (XXI), relativa al simil pezzo appoggiato, scorderemo di quanto gli incastri favoriscono la rigidezza; perciocchè qui il ventre della trave è minore della quinta parte di quello che prenderebbe, quando non fosse incastrata.

* 145. Se volesse farsi astrazione del peso proprio della trave, nè fosse carica di altri pesi, che da quello che ne pende dal mezzo, sarebbe $\pi=0$, e verrebbe

$$\text{(XXXVI)} \quad h_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{Pc^3}{3s}$$

ed il ventre è il quarto di quello che sarebbe (XXII) se fosse semplicemente appoggiata.

* 146. Se in vece la trave dovesse solo sostenere se stessa, sarebbe $P=0$, e π uguale al solo peso di una unità di sua lunghezza. Verrebbe

$$\text{(XXXVII)} \quad h_2 = \frac{1}{48} \cdot \frac{\pi c^4}{8s} \quad \text{§ 2}$$

e quindi prenderebbe un ventre pari alla quinta parte di quello che farebbe (XXIII) se fosse semplicemente poggia.

Di qui, e dalle cose precedenti, si fa manifesto il vantaggio grande d'incastrare sempre i pezzi di resistenza. Ma un incastro

non potendosi fare veramente invincibile, cioè tale da resistere alle pressioni F ed F_1 che abbiamo trovate, si vede che *nella pratica sarà prudente ritenere che incastri non ve ne fossero, comunque ve ne sieno di fatto.*

* 117. Una osservazione assai importante da fare, si è che la freccia, o ventre h è indipendente dalla k_1 , che possiam dire lunghezza dell'incastro; e che in vece le pressioni F , F_1 ne dipendono, e così che scemando la k_1 , esse crescono, e più la F_1 che non la F . Onde è che nell'incastare le travi nelle fabbriche, *dovrebbe porsi mente più alla struttura verso il fondo del buco che non a quella verso il suo labro: alla qual cosa, ordinariamente non molto si pone mente.*

* 118. Se nella (XXX) poniamo $k=r$, $k_1=r_1$, ed in vece di F , ed F_1 ed h i trovatini valori, avremo la equazione della curva di flessione del semipezzo, e sarà

$$(XXXVIII) \quad 2xy' = \frac{\pi k^2}{3} + \frac{Pk}{2} - Px - \pi x^2.$$

E poichè la x può prendersi da $x=0$, sino ad $x=k$; ed il primo di questi valori fa essere il valore di xy'' positivo, ed il secondo il fa essere negativo, si vede che la curva di flessione avrà un punto di flesso: e ne ritroveremo l'ascissa, facendo $y''=0$, e risolvendo la equazione risultante rispetto ad x . E così debb'essere; perciocchè nel punto O di sospensione del peso P , la curva rivolge convessità all'asse delle x , e nel punto degli appoggi gli rivolge concavità.

149. Tutto ciò che in questo articolo abbiain detto è relativo ai pezzi rigorosamente prismatici, cioè di sezioni identiche. Ma è facile il persuadersi, che in quanto alle derivate di second'ordine trovate, delle equazioni delle curve di flessione, nei diversi casi contemplati, esse stanno non solo per li pezzi a sezioni identiche; ma ancora *per quelli a sezioni variabili*, quando queste variano con continuità al variare della distanza loro dalla sezione effettiva d'incastro, o da quella che può suppirsi come tale.

Nei pezzi prismatici la π è costante, perchè (125) è costante il fattore M , ch'esprime la somma dei momenti d'inerzia di tutte le sezioni del pezzo, valutati rispetto all'asse neutrale; e per qualunque di esse intorno cui s'intendesse rotare, per cui poi il pezzo s'incurva. Ma ciò non può essere

se le sezioni del pezzo sono variabili; perciocchè allora, da una sezione all'altra del pezzo, non solo (114) per la medesima distanza (*fig. 7.*) $SA = \omega x = z$ di un fascetto di fibre, dall'asse neutrale, ne varia l'area $\gamma \delta \delta' \gamma' = Zz'$ della sezione, ma ancora le più grandi ascisse z di ciascuna sezione che abbiamo chiamate α, β , potranno variare dall'una all'altra.

Onde la y'' può variare non solo per intensità di ciascuna forza elementare e suo momento che la compongono, ma ancora pel numero di esse forze.

Le derivate di second' ordine dunque staranno del pari pei pezzi non prismatici, cioè a sezioni non identiche; tanto solo che pel fattore M della « vi si ponga la funzione che è della x , o della y , o di entrambe; ma non staranno le primitive loro, e le cose dette intorno alle frecce di curvatura; perciocchè queste si sono ottenute da quelle; e quelle si sono ottenute integrando col riguardare la « come costante.

Esprimiamo con $M(x, y)$ la funzione nota che la M è delle coordinate della curva di flessione. Sarà, in generale, in vece della (V), la equazione

$$(XXXIX) \quad Ey'' M(x, y) = \int_x^c \gamma \gamma' (\gamma - x) + \Sigma \cdot F(c - x).$$

150. Sia, a cagion di esempio, la sezione di un pezzo incastrato da un estremo, sempre rettangola, ma l'altezza delle diverse sezioni, vada variando secondo l'ordinata d'una parabola avente per vertice l'estremo ove è applicata una forza F , distante dall'incastro per c .

Supposto $E_1 = E_2 = E$; e b la larghezza costante di tutte le sezioni, (125) sarà $\alpha = \beta$, e verrà (XIV)

$$M = \frac{1}{2} \int_0^x Z z^2 = 2 \int_0^x b z^2 = \frac{2 b x^3}{3}$$

ed in oltre, pella equazione della parabola

$$\alpha^2 = q^2 (c - x) \quad \text{ed} \quad \alpha^3 = q^3 (c - x)^{\frac{3}{2}}$$

Onde, la derivata seconda della curva di flessione in questo caso sarà

$$(XL) \quad \frac{2}{3} E b q^3 (c - x)^{\frac{3}{2}} y'' = \int_x^c \gamma \gamma' (\gamma - x) + F(c - x)$$

la quale dovrà integrarsi certo in tutto diversamente di come abbiamo fatto per le precedenti. Ma le costanti arbitrarie si determinerebbero parimenti.

151. Se pure mantenendosi rettangole le sezioni del pezzo, fosse altra la variazione delle loro altezze, al variare della distanza x di esse dalla sezione che può riguardarsi come quella di un incastro, che fosse cioè $\alpha = \psi(x)$, la equazione generale della curva di flessione sarebbe

$$(XLI) \quad \frac{1}{2}Eb(\psi(x))^3 y'' = \int_a^x \gamma \gamma'(\gamma - x) + Z \cdot F(c - x);$$

ed essa curva potrà non essere più parabolica.

ARTICOLO II.

Caso in cui è mess' a cimento la resistenza alla rottura.

152. Abbiamo veduto (108), che se un pezzo incastrato invincibilmente da un estremo s'incurva, a causa di forze che ne mettono a cimento la resistenza rispettiva, e quindi giunto ad un certo segno si arresta; ciò avviene, perchè si sviluppino in esso certe forze intrinseche, capaci di equilibrare l'azione delle estrinseche: e che (114) quelle sviluppate da una serie di fibre tutte ugualmente distanti per Z dall'asse di equilibrio sono espresse, se verso la convessità da

$$E_1 \cdot 2Zz' \cdot zy''$$

e se verso la concavità da

$$E_2 \cdot 2Zz' \cdot zy''$$

ove $2Zz'$ è l'area della sezione di esse fibre; cosicchè, se quest'area fosse uguale all'unità, per esempio ad un'oncia quadrata (la centesima parte del palmo quadrato) sarebbero espresse rispettivamente da

$$E_1 zy'' \quad , \quad E_2 zy''$$

Onde, se esse fibre siano rispettivamente lontane per α e β dall'asse neutrale, e le più lontane da esso; quelle forze intrinseche, saranno rispettivamente espresse da

$$E_1 \alpha y'' \quad , \quad E_2 \beta y''$$

Or supponiamo note queste forze: e sia la prima R_1 .

la seconda R_2 . Sarà

$$(XLII) \quad R_1 = E_1 \alpha y'' \quad , \quad R_2 = E_2 \beta y''$$

e quindi

$$E_1 = \frac{R_1}{\alpha y''} \quad , \quad E_2 = \frac{R_2}{\beta y''}.$$

Dunque potremo avere novelle espressioni della somma delle forze intrinseche sviluppate o resistenze, indipendenti dai moduli di elasticità: in vece dipendenti dalla resistenza che offrono certe fibre poste a data distanza dall'asse neutrale, e che qui sono le più lontane da esso.

Tali espressioni si ottengono, sostituendo nelle già trovate (114)

$$2E_1 y'' \int_0^{\alpha} Z z z' \quad , \quad 2E_2 y'' \int_0^{\beta} Z z z'$$

in vece di E_1 , E_2 i valori di sopra: e sono

$$\frac{2R_1}{\alpha} \int_0^{\alpha} Z z z' \quad , \quad \frac{2R_2}{\beta} \int_0^{\beta} Z z z'$$

ed i momenti di esse medesime forze

$$\frac{2R_1}{\alpha} \int_0^{\alpha} Z z^2 z' \quad , \quad \frac{2R_2}{\beta} \int_0^{\beta} Z z^2 z'$$

Quindi le equazioni (I) e (II) si cambieranno nelle

$$(XLIII) \quad \frac{R_1}{\alpha} \int_0^{\alpha} Z z z' = \frac{R_2}{\beta} \int_0^{\beta} Z z z'$$

$$(XLIV) \quad 2 \left(\frac{R_1}{\alpha} \int_0^{\alpha} Z z^2 z' + \frac{R_2}{\beta} \int_0^{\beta} Z z^2 z' \right) = \int_x^c \gamma' (\gamma - x) + z \cdot F(c - x).$$

153. Le precedenti sono le equazioni generali. Ma poichè, come dimostrammo (118), se fosse $E_1 = E_2 = E$ esser dovrebbe $\int_0^{\alpha} Z z z' = \int_0^{\beta} Z z z'$, ne consegue che dovrebbe essere pure

$$(XLV) \quad \frac{R_1}{\alpha} = \frac{R_2}{\beta};$$

e se fosse $E_1 > E_2$, oppure $E_1 < E_2$, dovrebbe essere

$$\int_0^{\alpha} Z z z' < \quad \text{oppure} > \quad \int_0^{\beta} Z z z'; \text{ ne consegue che po-$$

tremo fare

$$(XLVI) \quad \frac{R_1}{\alpha} n = \frac{R_2}{\beta}$$

essendo

n numero intero, se $E_1 > E_2$

n numero frazionario, se $E_1 < E_2$

n uguale all'unità se $E_1 = E_2 = E$.

Quindi in vece delle equazioni precedenti avremo le equivalenti (scrivendo semplicemente R).

$$(XLVII) \quad \int_0^a Z z z' = n \int_0^{\beta} Z z z'$$

$$(XLVIII) \quad \frac{R}{\alpha} 2 \left(\int_0^a Z z^2 z' + n \int_0^{\beta} Z z^2 z' \right) = \int_x^c \gamma' (\gamma - x) + Z \cdot F(c - x).$$

Nelle quali, ripetiamo, sarà $n=1$, solo quando si assuma $E_1 = E_2 = E$: ed a questo caso risponde la equazione riportata dai diversi autori.

154. Se le forze estrinseche fossero tali, che accresciute di poco, il pezzo si rompesse; o non potendosi rompere, ne cominciassero a schiantare quelle sue fibre che più si stendono, o ne cominciassero a schiacciare quelle che più si accorciano; la R sarebbe allora la forza che sarebbe per produrre un tale effetto in esse fibre, ossia quella colla quale esse fibre a ciò resistono: e poichè la resistenza di tutte le altre fibre, pur dipende dalla R , dicesi allora questa quantità *modulo della resistenza rispettiva alla rottura*; e la equazione (XLVIII), *equazione di equilibrio nel caso della rottura*.

Ma è facile persuadersi che appunto in questo medesimo caso della rottura, quella equazione *non reggerebbe*; perciocchè le espressioni delle forze intrinseche, ovvero resistenze, in essa contenute, sono dedotte (152) da quelle che si sviluppano, quando n'è mess' a cimento la resistenza alla flessione, e queste sono esse stesse dedotte (113) da quelle in cui è mess' a cimento la elasticità assoluta; le quali sono fiduciali (18,73) fin tanto, che li allungamenti prodotti nelle fibre dei pezzi sono piccolissimi; ovvero fintanto che si è molto lungi dal caso, in cui metterebbesi a cimento la resistenza del pezzo alla rottura; sia che si schianti, o che si schiaccia.

Dunque per avvalerci della equazione (XLVIII), dovremo porre per R una quantità che sia una frazione di quella che potrebbe competere al caso della rottura; anzi che corrispon-

da ad un caso ben lungi da essa. Indichiamo con R' una tale frazione. E se supporremo (col Navier ed altri autori (125)), che sia

$$E_1 = E_2 = E \text{ per cui poi } n=1,$$

avremo per la equazione, della quale dovremo servirci, infine

$$(XLIX) \frac{R'}{\alpha} 2 \left(\int_0^x Z z^2 z' + \int_0^\beta Z z^2 z' \right) = \int_x^c \gamma' (\gamma - x) + \varepsilon \cdot F(c - x).$$

E questa ci darà una relazione tra le forze e le dimensioni del pezzo, *essendo la quale, non sarà nissuna fibra, che soffra una tensione, od una pressione maggiore di R' .*

155. Il primo membro della (XLIX) suol indicarsi con ρ ; onde

$$(L) \quad \rho = \frac{R'}{\alpha} 2 \left(\int_0^x Z z^2 z' + \int_0^\beta Z z^2 z' \right) = \frac{R'}{\alpha} M.$$

E quando non vi si pone la R' , ma la R , suole chiamarsi, comunque *impropriamente*, *momento di resistenza alla rottura*: e vedesi, perchè il caso che qui consideriamo, dicesi caso in cui è mess'a cemento la resistenza alla rottura; mentre in vero la equazione che consideriamo, non può valere, che pel caso in cui è mess'a cemento una certa resistenza, *molto inferiore* a quella, che dovrebb' essere (154) vinta per schiantarsi o schiacciarsi quelle fibre del pezzo, che sono le più lontane dall'asse neutrale. La quantità $\frac{R'}{\alpha} M$ la chiameremo *momento di resistenza*.

156. Ponendo mente alla composizione delle equazioni dei momenti; sì pel caso della flessione (V), che pel caso della rottura (XLIX), si fa manifesto che i secondi membri di esse sono perfettamente identici; e che però i primi esser debbono tra loro uguali. Dunque è

$$\rho = \varepsilon y'';$$

onde si scorge che in generale la ρ dovrà avere il più gran valore, ove il momento di elasticità è il più grande, ed anche, ove il raggio di curvatura è il minimo. Quindi in un medesimo pezzo, non solo in una sua medesima sezione saranno

delle fibre più tese o compresse (e sono le più lontane dall' asse neutrale), ma ancora potranno esservene delle più tese o compresse in una sezione, anzi che in un'altra; e sono in quella sezione corrispondente a quel punto della curva di flessione pel quale y'' ha il più gran valore; ovvero ove ha il più gran valore la y'' , se il pezzo è veramente prismatico, nel qual caso la ρ è costante. E ciò è, perchè quando il pezzo è veramente prismatico la ρ non potrebbe avere diversi valori, che avendone la R' diversi; ed R' è la tensione o compressione delle fibre che in una medesima sezione, sono appunto le più tese, o le più compresse.

Ma il valore della ρ è così composto, che quando il pezzo è prismatico il fattore

$$\frac{2}{\alpha} \left(\int_0^x Z z^2 z' + \int_0^{\beta} Z z^2 z' \right) = \frac{M}{\alpha}$$

è costante.

Dunque, quando il pezzo è prismatico, le fibre sue sono diversamente tese o compresse da una sezione all'altra; e le più tese o compresse sono nella sezione corrispondente al più gran valore di y'' .

Dunque, in generale, se vogliamo che in un dato pezzo, non siano fibre tese o compresse oltre una certa misura, equivalente ad un peso di R' rotoli (che tende o preme una verga prismatica di sezione un'oncia quadrata) dovremo fare che la ρ uguagli il più gran valore di y'' .

Ed allora vi sarà una sezione nella quale, quando il pezzo venisse a rompersi, si romperebbe di fatto. E sarebbe quella corrispondente a quel valore di x , che dà il più gran valore pella y'' . Li quali valori di x , sogliono talora essere più, corrispondenti ad un solo più gran valore della y'' .

157. Non così se si facesse variare la sezione del pezzo, se cioè la $\frac{M}{\alpha}$ variasse. In questo caso potrebbe farsi che avesse sempre luogo la equazione (XLIX); e mantenendosi sempre la stessa la R' ; e ciò, facendo opportunamente variare il fattore

$$\frac{M}{\alpha} = \frac{2}{\alpha} \left(\int_0^x Z z^2 z' + \int_0^{\beta} Z z^2 z' \right);$$

onde quella equazione fosse verificata per tutt' i valori della x .

Quì la R' , potendo essere sempre la stessa per tutte le sezioni del pezzo; vuol dire, che in ogni sua sezione, le fibre o molecole le più lontane dall'asse neutrale, *sono tutte ugualmente tese o compresse*; e che perciò esse fibre in ogni sezione resistono ugualmente alle forze estrinseche che piegano il pezzo. Tali pezzi diconsi perciò di *ugual resistenza*.

158. Abbiamo dunque due casi bene distinti.

1.^o Caso. Quando si voglia che in un dato pezzo, *niuna sezione* abbia fibre che sieno tese o premute oltre una certa misura.

In questo caso il pezzo può essere veramente prismatico: la sezione, ove stanno le fibre le più tese o le più compresse è quella corrispondente a quel valore dell'ascissa x che fa prendere alla somma dei momenti delle forze estrinseche (secondo membro della (V) ed anche della (XLIX)) il più gran valore: e le dimensioni del pezzo prismatico o le intensità delle forze, che debbono agirvi sù, perchè non abbia fibre tese o compresse più di una certa misura, (espressa dal peso R') sono date dalla equazione che nasce uguagliando la p ossia $\frac{R'}{\alpha}M$ (momento di resistenza) a quella quantità che si ottiene, mettendo nel secondo membro della (XLIX), quel valore della x , che gli fa prendere il più gran valore possibile.

2.^o Caso. Quando si voglia, che in un pezzo, *in tutte le sezioni, le fibre le più lontane* dall'asse neutrale, sieno tese o compresse di una stessa data misura, nè oltre.

In questo secondo caso, il pezzo debbe avere sezioni variabili: e le sezioni sue, debbono avere tali dimensioni, e tali intensità le forze che vi agiscono sù, da essere per tutt' i valori di x verificata la (XLIX).

Ben intese le precedenti generalità applichiamo a diversi casi particolari, che sono di più frequente uso nella pratica; e cominciando prima dal caso in cui il pezzo ha sezioni identiche; e poi passando all'altro, in cui il pezzo ha sezioni simili, ma non identiche.

PEZZI A SEZIONI IDENTICHE.

159. Abbiassi un pezzo incastrato orizzontalmente da un estremo, caricato uniformemente di pesi Π per ogni unità di lunghezza; ed all' altro suo estremo agisca una forza F .

Qui il secondo membro della (XLIX) sarà (come già fu calcolato (120))

$$\frac{\Pi}{2}(c^2 - 2cx + x^2) + F(c - x).$$

Mettendolo sotto la forma

$$\frac{\Pi}{2}[c^2 - x(2c - x)] + F(c - x),$$

ci mostra manifestamente, che acquista il più gran valore, quando $x=0$.

Dunque le fibre le più tese o le più compresse stanno nella sezione d'incastro.

E perchè la loro tensione o compressione non ecceda la misura di R' , deve avere luogo la equazione.

$$(LI) \quad \frac{R'M}{a} = \left(\frac{\Pi c}{2} + F \right) c$$

160. Se il peso Π fosse trascurabile a fronte della forza F , dovrebbe verificarsi la

$$(LII) \quad \frac{R'M}{a} = Fc$$

161. Se sul pezzo non agisse la forza F , dovrebbe essere

$$(LIII) \quad \frac{R'M}{a} = \frac{\Pi c^2}{2}$$

162. Or supponiamo che il peso Πc di cui è aggravato tutto il pezzo, raccolto, sia posto invece a pender tutto dall'estremità non incastrata. Per la (LII) avremo

$$\frac{R'M}{a} = \Pi c^2$$

Dunque un pezzo orizzontale, orizzontalmente incastrato da un estremo, caricato di un peso che ne pende dall'altro

estremo, ne reggerà uno doppio, senza che le sue fibre siano maggiormente tese o compresse, quando un tal peso sia per tutta la sua lunghezza uniformemente distribuito.

163. Abbiassi ora (*fig. 9.*) un pezzo poggiato su due sostegni: caricato di pesi uniformemente distribuiti per tutta la sua lunghezza, e caricato nel punto medio tra i sostegni da un peso addizionale P .

Il secondo membro della (XLIX) sarà (come fu calcolato al n.º 131).

$$\frac{c}{8}(\Pi c + 2P) - \frac{Px}{2} - \frac{\Pi x^2}{2}.$$

Ma questo acquista il più gran valore, quando $x=0$.

Dunque le fibre le più tese o le più compresse staranno nella sezione media tra li appoggi del pezzo.

Quindi, perchè nel pezzo non siano fibre tese o premute oltre la misura R' , dovrà essere

$$(LIV) \quad \frac{R'M}{a} = \frac{c}{4} \left(\frac{\Pi c}{2} + P \right)$$

164. Paragonata questa colla (LI) si vede, che un pezzo sostenuto da due appoggi, reggente un peso, soffre uno sforzo ch'è la quarta parte di quello che reggerebbe, se essendo incastrato da un estremo, ne scendesse dall'altro estremo, il peso che ne pendeva dal mezzo.

165. Se non siavi peso uniformemente distribuito, ed il peso proprio del pezzo sia trascurabile in fronte del peso P , dovrà essere

$$(LV) \quad \frac{R'M}{a} = \frac{Pc}{4}.$$

166. Se fosse una trave non aggravata altro che del proprio peso, dovrà essere

$$(LVI) \quad \frac{R'M}{a} = \frac{\Pi c^2}{8}.$$

Cioè lo sforzo che soffre sarà la metà del precedente, così come avveniva (102) nel caso in cui il pezzo era incastrato da un estremo.

* 167. Che se il peso P non penda dal mezzo del pezzo, ma da un suo punto qualunque (fig. 8.), il secondo membro della (XLIX), (come fu calcolato al num. 128) sarà per la porzione BOQ .

$$\frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{4} - n^2 \right) \left(\frac{\pi c + 2P}{c} \right) - \frac{1}{2} \left[P - \frac{2n}{c} (\pi c + P) \right] x - \frac{\pi x^2}{2}$$

e per l'altra HSR .

$$\frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{4} - n^2 \right) \left(\frac{\pi c + 2P}{c} \right) - \frac{1}{2} \left[P + \frac{2n}{c} (\pi c + P) \right] x - \frac{\pi x^2}{2}.$$

Queste due quantità acquistano il più gran valore, quando $x=0$.

Dunque le fibre le più tese o le più premute staranno nella sezione per dove passa la direzione del peso addizionale P .

Quindi dovrà essere

$$(LVII) \quad \frac{R'M}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{4} - n^2 \right) \left(\frac{\pi c + 2P}{c} \right).$$

* 168. Supponiamo che il peso P , non sia fisso in un medesimo luogo, ma che passeggi per su la trave, come è nei ponti.

Varierà la $n=AD$; e la R' prenderà diversi valori; ed il più grande quando $n=0$.

Dunque se un peso, si muove lungo una trave, questa soffrirà il più grande sforzo quando il peso passa pel suo punto di mezzo.

Quindi se ne determineranno le dimensioni nella ipotesi che debba reggere un peso posto nel punto medio tra i due appoggi, cioè per la (LIV).

* 169. Abbiasi (fig. 45.) un pezzo incastrato dai due estremi: sia carico di pesi uniformemente distribuiti per tutta la sua lunghezza; ed in oltre di un peso addizionale P che ne pende dal suo punto di mezzo tra gli incastri.

Il secondo membro della (XLIX) ordinato rispetto ad x , (come fu calcolato al num. 148), sarà per ciascuna metà del pezzo

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\pi k^2}{3} + \frac{Pk}{2} - Px - \pi x^2 \right).$$

Fù veduto (148) che la curva di flessione ha un punto di flesso; e che però per un certo tratto volge la concavità all'asse delle x , e per un altro certo tratto volgeglì convessità.

Dunque (158) dobbiamo qui ricercare quel valore di x , tra tutti quelli che può avere da zero a k , che il rendono il più grande possibile; e sia in valore positivo, sia in valore negativo.

Ma i termini negativi del polinomio precedente, sono così fatti, che per $x=k$ diventano maggiori dei positivi; ed il rendono ne-

gativo bensì, ma maggiore della somma dei positivi. Dunque le sezioni ove stanno le fibre le più tese o le più compresse, sono quelle che stanno negli incastri: e questo pezzo avrà due sezioni, ove le fibre o non soffrono tensione nè pressione, o se ne soffrono sono tutte ugualmente tese.

Pertanto perchè le fibre del pezzo non soffrano tensione o compressione, oltre la misura R' , dovrà essere

$$\frac{R'M}{x} = \frac{\pi k^2}{3} + \frac{Pk}{4}.$$

Facciamo $k = \frac{c}{2}$; esprimendo c la distanza $A'A$ dei labbri degli incastri. L'ultima equazione si trasformerà nell'altra

$$(LVIII) \quad \frac{R'M}{x} = \frac{c}{8} \left(\frac{2\pi c}{3} + P \right).$$

E vedesi (163) facilmente, di quanto scema lo sforzo di una trave incastrata rispetto a quello che soffrirebbe quando fosse semplicemente posata.

* 170. Se la trave non fosse carica di pesi uniformemente distribuiti pel tratto tra gli incastri; e tale fosse il peso P , da potersi rispetto ad esso avere come nullo il peso proprio della trave, sarebbe $\pi = 0$; e verrebbe

$$(LIX) \quad \frac{R'M}{x} = \frac{Pc}{8}.$$

Onde una trave prismatica incastrata orizzontalmente, potrà reggere nel suo mezzo un peso doppio (LV), che quando fosse semplicemente posata su due sostegni orizzontali; e non pertanto soffrirà il medesimo sforzo.

Nel caso stesso di $\pi = 0$, il polinomio del n.° 169, diventa

$$\frac{1}{2} \left(\frac{Pk}{2} - Px \right)$$

e quando $x = k$, si riduce a

$$-\frac{Pk}{4};$$

ed a ciò si riduce pure, quando $x = 0$.

Dunque nel caso in cui il peso del pezzo è trascurabile rispetto al peso addizionale che ne pende dal mezzo, si avranno tre sezioni nelle quali stanno le fibre del corpo le più tese o le più compresse, e sono quelle negli incastri e l'altra nel mezzo.

* 171. La trave incastrata non sostenga altro peso che il suo

proprio; ovvero sia solamente uniformemente caricata di pesi, Sarà $P=0$; e la (LVIII) si trasforma nella

$$(LX) \quad \frac{R'M}{a} = \frac{\pi c^2}{12} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi c^2}{8}.$$

E facendo paragone tra il valore che ne verrebbe di R' , dall'altro che ne darebbe la (LVI) si vede che una trave incastrandosi nei suoi estremi, e non reggente altro peso che il suo proprio, od essendo caricata solo di pesi uniformemente ripartiti pel tratto tra gli incastri, soffre uno sforzo le due terze parti di quello soffrirebbe se parimente carica fosse solamente poggiata su due sostegni: ed anche la trave incasirata può reggere un peso uniformemente distribuito pari ad una volta e mezzo quello che reggerebbe nel mezzo (LIX); e non pertanto soffrirà il medesimo sforzo.

PEZZI DI UGUALE RESISTENZA.

172. Come già si è detto (157) i pezzi di ugual resistenza sono tali che le fibre le più lontane dall'asse neutrale sono dappertutto, cioè in ogni sezione del pezzo, ugualmente tese o compresse; e non oltre una certa misura. La qual cosa perchè abbia luogo (158), debbe essere sempre verificata la (XLIX)

$$\frac{2R'}{a} \left(\int_0^x Z z^2 z' + \int_0^{\beta} Z z^2 z' \right) = \int_x^c \gamma \gamma' (\gamma - x) + \Sigma \cdot F (c - x).$$

Or questa equazione non può essere verificata per tutt' i valori di x , che quando ciò che moltiplica R' cioè il fattore $\frac{M}{a}$ sia variabile. E poichè un tal fattore potrebbe farsi variare in più modi diversi; per le medesime forze estrinseche, possono convenire più pezzi diversi di ugual resistenza, comunque la R' pur serba il medesimo valore.

Noi non ci occuperemo di tutt' i solidi di ugual resistenza immaginabili, ma solo di quelli di sezione rettangola e di larghezza uniforme. Epperò innanzi tutto vedremo, in questo caso, cosa diventa il detto fattore $\frac{M}{a}$.

Dovendo le sezioni essere rettangole, e nella ipotesi di $E_1=E_2=E$ l'asse neutrale passando pel centro di gra-

vità della sezione (118), sarà $\alpha = \beta$: in oltre dovendo il pezzo avere larghezza uniforme, sarà Z costante, ed eguale alla semilarghezza della sezione. Quindi chiamando b la larghezza del pezzo, sarà in generale

$$\frac{R'M}{\alpha} = \frac{2R'}{\alpha} \left(\int_0^{\alpha} Z z^2 z' + \int_0^{\beta} Z z^2 z' \right) = \frac{4R'}{\alpha} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \frac{b}{2} z^2 z' = \frac{2}{3} R' b \alpha^2.$$

E la equazione generale dei pezzi di ugual resistenza di sezioni rettangole, e di larghezza costante, sarà

$$(LXI) \quad \frac{2}{3} R' b \alpha^2 = \int_x^c \gamma \gamma' (\gamma - x) + \Sigma \cdot F (c - x).$$

E per seguitare la generalità delli Autori, di questa ci avvaleremo.

Onde tutte le conseguenze e verità che ne dedurremo non staranno, che quando i due moduli di elasticità assoluta, positiva e negativa, sono uguali.

173. Applichiamo la precedente equazione generale (LXI) al caso di un pezzo incastrato orizzontalmente da un estremo, caricato uniformemente di pesi, così che per ogni unità di lunghezza la somma ne sia Π ; e che sia caricato in oltre di un peso addizionale pendente dal suo estremo.

La precedente equazione diventerà (120), dopo ordinazione il secondo membro secondo le potenze crescenti della x

$$(LXII) \quad 2R' b \alpha^2 = 3 \left(\frac{\Pi c}{2} + P \right) c - 3 \left(\Pi c + P \right) x + \frac{3 \Pi x^2}{2}.$$

E questa è la equazione della sezione longitudinale del pezzo, riferita alla retta orizzontale menata pel punto di mezzo della sezione d'incastro, come asse delle x , ed alla verticale menata per essa come asse delle α .

174. Facciamo nella precedente equazione

$$x = x_1 + H$$

Essa diventa,

$$\begin{aligned} 2R' b \alpha^2 = & 3c \left(\frac{\Pi c}{2} + P \right) - 3 \left(\Pi c + P \right) H + \frac{3 \Pi H^2}{2} \\ & - 3 \left(\Pi c + P - \Pi H \right) x_1 + \frac{3 \Pi x_1^2}{2}. \end{aligned}$$

Se supponiamo che sia tale la H da far essere

$$\pi c + P - \pi H = 0$$

bisogna che sia

$$H = c + \frac{P}{\pi}$$

E quindi sarà

$$x = x_1 + c + \frac{P}{\pi}$$

e la equazione della sezione longitudinale del pezzo sarà

$$(LXIII) \quad 3\pi^2 x_1^2 - 4R'\pi b x^2 = 3P^2$$

che è la equazione di una iperbole riferita al suo centro.

Fatto $x_1 = 0$, abbiamo $x = c + \frac{P}{\pi}$.

Supponiamo dunque (fig. 44.) che sia O il punto di mezzo dell'incastro. Tiriamo per O la orizzontale Ox : sarà questa l'asse delle x . Sulla Ox prendiamo la OH uguale a c , e quindi da H verso x tagliamo $HC = \frac{P}{\pi}$, sarà C il centro della iperbole.

Fatto poi nella (LXIII), successivamente

$$x_1 = 0, \text{ viene } x_1 = \pm \frac{P}{\pi}$$

$$x_1 = 0, \text{ viene } x = \pm \frac{P}{2} \sqrt{\frac{-3}{R'\pi b}}$$

E questi sono i valori dei semiassi della iperbole. E si vede che nell'estremo H del pezzo, onde pende il peso P , star deve il vertice di un ramo della iperbole. L'altro ramo, ch'avrebbe il vertice in H' non c'interessa non appartenendo al pezzo. E la sezione longitudinale di questo sarà EHD . L'altezza $OD = OE$ sarà data dalla

$$e = \sqrt{\frac{3(\pi c + 2P)c}{4R'b}}$$

Dunque perchè un pezzo tutto ugualmente largo, di sezione rettangola, orizzontalmente incastrato da un estremo,

caricato uniformemente da pesi, e dall'altro estremo da un peso addizionale, sia di ugual resistenza, debb'esserne la sua sezione longitudinale una iperbolà, col centro al di là del suo estremo per quanto è il rapporto del peso che ne pende al peso uniformemente distribuito per ciascuna unità, di asse reale uguale al rapporto medesimo, e di asse immaginario uguale alla metà del peso che ne pende, moltiplicato per la radice del quoziente di tre, pel peso uniformemente distribuito, nella larghezza delle sezioni, e nella misura con che le fibre ne sono il più tese o compresse.

175. Sia $n=0$: il pezzo cioè debba essere caricato solo dal peso P da penderne dall'estremo opposto a quello che v'è incastrato. La (LXII) diventerà

$$(LXIV) \quad 2R'b\alpha^2 = 3P'c - x).$$

Equazione della parabola.

Fattovi $x=0$, ne risulta

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{3}{2} \frac{Pc}{R'b}}$$

Onde (fig. 45.) se sia O il punto medio della sezione d'incastro, ove cade l'asse neutrale; e prendiamo la OD , e la OE uguali a questi due valori della α , sarà DE l'altezza del pezzo all'incastro. E vedesi immediatamente dalla (LXIV) dovere stare all'estremo H del pezzo il vertice della parabola e dovere $\frac{3}{2} \frac{P}{R'b}$ esserne il parametro.

Dunque perchè un pezzo a sezioni rettangole di ugual larghezza incastrato orizzontalmente da un estremo, e reggente un peso dall'altro, sia di ugual resistenza, bisogna che abbia per sezione longitudinale una parabola, di vertice l'estremo onde pende il peso, e di parametro i tre mezzi di esso peso, diviso pel prodotto della larghezza del pezzo nello sforzo massimo cui si vuole ne soggiacciano le fibre.

176. Sia $P=0$. Il pezzo cioè debba sostenere solo un peso uniformemente distribuito per la sua lunghezza. La (LXIII) diventerà

$$(LXV) \quad 4R'b\alpha^2 = 3nx''$$

Onde poi

$$\alpha = \pm x_1 \sqrt{\frac{3\pi}{4R'b}}.$$

Ed in questo caso sarà (174) la

$$\alpha = x_1 + c.$$

Ed è evidente che la (fig. 46.) rappresenta in questo caso la sezione longitudinale del pezzo, essendo $ED = 2OD = \sqrt{\frac{3\pi c^2}{R'b}}$.

Dunque perchè un solido tutto ugualmente largo incastrato da un estremo e caricato uniformemente di pesi per tutta la sua lunghezza, sia di uguale resistenza, è necessario che abbia per sezione longitudinale un triangolo isoscele di cui la base stia nell'incastro, nell'estremo opposto il vertice, e la base uguale alla radice, del triplo del peso che grava il pezzo, nella lunghezza sua, diviso pel prodotto della larghezza nello sforzo massimo cui si vuole soggiacciano le sue fibre.

177. Debba il pezzo di ugual resistenza essere posato su due sostegni orizzontali; e debba sostenere un peso π uniformemente distribuito per tutta la sua lunghezza ed un peso addizionale P che ne penda dal mezzo. La (LXI) sarà sostituita (131) dalla

$$(LXVI) \quad 2R'b\alpha^2 = \frac{3c}{4} \left(\frac{\pi c}{2} + P \right) - \frac{3Px}{2} - \frac{3\pi x^2}{2}$$

e questa sarà la equazione della sezione longitudinale per ogni metà del pezzo, che dà $\alpha = 0$, quando $x = \frac{c}{2}$.

Fattovi $x = x_1 + H$; e determinata così la H che tutt' i termini che moltiplicano la x_1 vanno a zero, sarà

$$H = -\frac{P}{2\pi}, \text{ ed } x = x_1 - \frac{P}{2\pi};$$

e ad $x_1 = 0$; risponde $x = -\frac{P}{2\pi}$:

e la equazione di sopra diventa, dopo le riduzioni,

$$(LXVII) \quad 4R'b\alpha^2 + 3\pi x_1^2 = \frac{3}{4} \left[\pi c^2 + P \left(2c + \frac{P}{\pi} \right) \right]$$

che evidentemente appartiene ad una ellisse.

Siano (*fig. 47.*) Q, R i luoghi degli appoggi, è $QR=c$. Se pel punto di mezzo O meniamo la verticale $PO\alpha$ perpendicolare a QR , sono $Ox, O\alpha$ li assi coordinati della (LXVI): e se da O verso Q prendiamo la OC uguale a $\frac{P}{2\pi}$ sarà C il centro della ellisse appartenente al semipezzo a destra di $O\alpha$, e che ha il suo vertice sull'appoggio R . Onde questa metà del pezzo avrà per sezione longitudinale una porzione di ellisse minore della sua metà; e così la $QDRE$ sarà quella di tutto il pezzo; ed ove è

$$DE=2a=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(\pi c+2P)c}{R'b}}$$

Dunque in questo caso la sezione longitudinale del pezzo dovrà comporsi di due porzioni di ellissi: per la semilunghezza a destra col centro a sinistra, e per la semilunghezza a sinistra col centro a destra della verticale di mezzo; e ciascuno tanto distante da questa, per quanto è il rapporto del peso addizionale al doppio di quello che deve gravitare su ciascuna unità di lunghezza della distanza delli appoggi.

E vedesi però che a misura che il peso π si fa piccolo, la semisezione longitudinale si avvicina ad essere parabolica.

178. Se $\pi=0$, la equazione (LXVI) diventa

$$(LXVIII) \quad 4R'b\alpha^2=3P\left(\frac{c}{2}-x\right)$$

Equazione di parabola di parametro $\frac{3P}{4R'b}$: che è la metà del parametro della parabola di equazione (LXIV) pertinente al caso di un pezzo incastrato da un solo estremo e di lunghezza, quanto quello che qui consideriamo.

Quì le porzioni di ellisse DRE, DQE (*fig. 47.*), si trasformeranno in due parabole e la sezione longitudinale del pezzo (*fig. 48.*), costerà di due porzioni uguali e simmetriche DQE, ERD di parabole.

Dunque quando il pezzo debbe sostenere solo un peso che ne pende dal mezzo, la sua sezione longitudinale dovrà com-

porci di due porzioni di parabola accoppiate, coi vertici ai luoghi delli appoggi, e di parametro, i tre quarti del peso retto, diviso pel prodotto della larghezza del pezzo nello sforzo massimo cui si vuole soggiacciano le sue fibre.

179. Se fosse $P=0$, la (LXVII) si cambierebbe in

$$(LXIX) \quad 4R'b^2 + 3\pi x_1^2 = \frac{3}{4}\pi c^2$$

ed il valore di x_1 corrispondente all' altro di $x=0$, sarebbe (177) pure *zero*. Per modo che i centri (*fig. 71.*) C, C' delle due porzioni di ellissi DQE, DRE , si confonderanno nel punto di mezzo O , diventando così ciascuna di esse parti, metà di una sola e medesima ellisse, (*fig. 49.*): di asse maggiore c , e minore

$$\frac{c}{2} \sqrt{\frac{3\pi}{R'b}}.$$

Dunque perchè un pezzo posato su due appoggi orizzontali, e caricato solo di pesi uniformemente distribuiti per tutta la distanza di essi appoggi, sia di ugual resistenza, è necessario che abbia per sezione longitudinale una ellisse col centro equidistante dalli appoggi; asse maggiore la distanza loro; ed asse minore la metà di essa medesima distanza nella radice quadrata del triplo del peso su ciascuna unità di lunghezza, diviso per la larghezza costante del pezzo nello sforzo massimo, cui si vuole soggiacciano le sue fibre.

* 180. Nella ipotesi che sia $\Pi=0$, supponiamo che il peso P non debba pendere dal mezzo del pezzo, ma che il debba da un altro luogo.

Quì il secondo membro della (LXI) dovrà essere (128) lo stesso che la metà di quello delle (XVII, e XVIII), quando vi si faccia $\Pi=0$. Quindi la (LXI) sarà sostituita dalle due

$$(LXX) \quad \begin{aligned} \frac{2R'b}{3P}x^2 &= \frac{c}{2} \left(1 - \frac{4n^2}{c^2}\right) - \left(1 - \frac{2n}{c}\right)x \\ \frac{2R'b}{3P}x^2 &= \frac{c}{2} \left(1 - \frac{4n^2}{c^2}\right) - \left(1 + \frac{2n}{c}\right)x. \end{aligned}$$

Delle quali la prima è relativa alla porzione del pezzo situata a sinistra della verticale che passa pel punto di sospensione del peso, e la seconda all'altra situata a destra della verticale stessa.

Facciamovi $x=0$.

Entrambe danno un solo e medesimo valore per a ; ed è

$$(LXXI) \quad a = \pm \sqrt{\frac{3Pc\left(1 - \frac{4n^2}{c^2}\right)}{4R'b}}$$

E se vi facciamo $x=0$, porgono rispettivamente

$$a = \frac{c}{2} + n$$

$$a = \frac{c}{2} - n.$$

Dunque se vogliasi che sia di ugual resistenza un pezzo posato su due appoggi orizzontali, e da reggere un peso che ne pende da una sezione qualunque tra gli appoggi, dovrà avere la sua sezione longitudinale composta di due parabole coi vertici sulli appoggi, dirette in senso contrario e che abbiano ordinata comune nella sezione onde pender deve il peso.

Se (fig. 20.) sia QR la distanza che aver debbono li appoggi, e per O passi la direzione del peso da essere sostenuto, la sezione longitudinale del pezzo sarà composta dalle due parabole DQE , ERN ; ove essendo A il punto di mezzo della distanza QR , è $AO=n$; e quindi $DE=2OE=2a$, essendo a uguale al valore datone dalla (LXXI).

* 181. È facile vedere che i parametri di tali parabole sono rispettivamente

$$\frac{3P\left(1 - \frac{2n}{c}\right)}{2R'b} \quad , \quad \frac{3P\left(1 + \frac{2n}{c}\right)}{2R'b}$$

e che però il pezzo dovrà essere tanto meno alto per quanto più la sezione ond'è sospeso il peso si avvicina all'uno od all'altro delli appoggi; e che debbe avere la più grande altezza, quando il peso ne pende dal mezzo: e ciò vedesi ancora dal valore di a riportato di sopra, e corrispondente al caso di a uguale zero.

Se dunque il peso non dovesse stare fisso in un luogo del pezzo, ma dovesse camminare per sopra di esso, non potremmo avere davvero un pezzo di ugual resistenza. Ma non pertanto potremmo

fare in guisa, che in ogni sua posizione, le fibre della sezione nulla quale, camminando, si vada a trovare il peso, non abbia fibre tese o compresse più della data misura R' . La qual cosa non può aver luogo, quando la sezione longitudinale del pezzo è rettangola; perciocchè allora, come è facile persuadersi dalle cose dette al n.° 168, la tensione o compressione delle fibre più lontane dalla superficie neutrale si fa minore a misura che il peso mobile s'allontana dal mezzo del pezzo.

E si rende manifesto che si soddisfarà a ciò che si dimanda, se daremo al pezzo, in ogni luogo, tale altezza, quale ne competerebbe, se da quel luogo pendesse il peso. Il valore della quale altezza si ottiene ponendo nelle (LXX) la x uguale a zero, ossia dalla (LXXI); e poi dando alla n , molti diversi valori. Lo che equivale ad assumervi la n variabile, dopo fatto $x=0$.

Dunque allora la sezione longitudinale del pezzo avrà per equazione

$$4R'bn^2 + 12Pn^2 = 3Pc^2$$

nella quale la n e la a sono le coordinate variabili.

Dunque, se per sopra un solido debba andare camminando un peso; e vogliamo così costruirlo, che in ogni posizione del peso le fibre della sezione, ove esso giace, le più lontane dalla superficie neutrale, siano premute nè più nè meno di una certa misura, dovrem farne la sezione longitudinale, secondo una ellisse: di asse orizzontale la distanza dei sostegni, e di asse verticale la radice dei tre quarti del prodotto dei rapporti della lunghezza alla larghezza del pezzo, e del peso mobile allo sforzo maggiore delle fibre nel luogo ove il peso si trova.

* 182. Per quest'ultimo pezzo e per tutti li altri di ugual resistenza contemplati innanzi, le derivate di second'ordine delle curve di flessione saranno le medesime calcolate nell'articolo precedente. Ma non saranno le medesime le equazioni finite di esse curve: epperò diverse di quelle trovate precedentemente ne sarebbero le frecce o ventri di curvatura; conformemente a quanto dicemmo in generale dal n.° 149 al n.° 151.

E però pei solidi di ugual resistenza qui contemplati, dovremmo, nella (XLI) in vece di $4(x)$ porre i valori di a che si caverebbero dalle trovate equazioni, della sezione longitudinale del pezzo per ciascuno di essi, ed analogamente aggiustarne il secondo membro, e poi integrarla come insegnano i metodi del calcolo integrale.

183. Quando i pezzi, dei quali si mette a cimento la resistenza rispettiva, sono a sezioni identiche, è facile tenersi conto del peso proprio del pezzo; perciocchè il peso uniformemente distribuito, che abbiamo chiamato con π , può prendersi appunto pel peso proprio del pezzo. Non così quando il pezzo è di ugual resistenza. Allora la sezione sua, dovendo variare da un luogo ad un altro della sua lunghezza, il peso proprio non può essere costante per ogni unità di lunghezza, ma essere di necessità variabile, e nella (LXI) in vece di γ dovremmo porre $\int_{\gamma}^{\gamma+1} 2pba$, essendovi α l'ordinata del profilo longitudinale da trovarsi, e p il peso di una unità cubica della materia di che vuolsi comporre il pezzo. E si vede che il problema debbe però riuscire assai più complicato.

Ma in pratica si fa astrazione dal peso del pezzo, essendo questo, (specialmente quando usonsi pezzi di resistenza) trascurabile a fronte dei pesi estrinseci, che agiscono su di esso. Ed ove ciò non sia, o non si possa avere che sia, può determinarsi il pezzo o supponendone il peso come costante ed uguale a quello della sezione più grande, o della media: nè si avrà con ciò altro errore se non che questo: cioè, che il pezzo risulta alquanto più robusto; ossia tale che veramente alcune fibre delle più lontane dalla superficie neutrale vengono ad esser tese o compresse un poco meno di quello che si vorrebbe.

Però potranno sempre ritenersi in pratica, come giusti i risultati precedenti.

ARTICOLO III.

*Del come applicare le precedenti teorie,
e con quali riguardi.*

184. Nei due articoli precedenti abbiamo considerate due cose precipuamente: l'incurvarsi di un pezzo prismatico per l'azione di forze estrinseche: e le relazioni che esister deb-

lono tra esse forze e le intrinseche sviluppate, perchè le fibre, che nel pezzo, sono le più tese o le più compresse per effetto dell'incurvamento, soffrano sforzi inferiori ad una certa prestabilita misura; od anche in vece tutti eguali ad essa misura, per quelle fibre che nella intera lunghezza del pezzo sono le più lontane dalla superficie neutrale. E ne abbiamo dedotti teoremi utilissimi per le loro applicazioni. Perciocchè per essi si hanno norme certe e generali, massimamente pelli effetti comparativi dell'incurvarsi dei pezzi diversamente sostenuti od incastrati, e variamente caricati da pesi; ai quali sono paragonabili le diverse travature o pezzi di resistenza in generale che possono usarsi nelle costruzioni sì civili che militari, e sono riducibili molti organi di trasmissione o sostenitori delle macchine: ed anche pelli sforzi vari, od uguali, alli quali le fibre delle travi o pezzi di resistenza, od organi di trasmissione o sostenitori debbono soggiacere.

Ma ciò non basta. Nelle applicazioni è necessario calcolare di fatto essi effetti d'incurvamento, e li sforzi cui vanno soggette le fibre che sono le più tese o compresse in un medesimo pezzo per date forze che agiscono su di esso; od anche calcolare di fatto, le dimensioni da darsi al pezzo, onde per esse date forze, quelli sforzi non oltrepassino una certa misura, od all'inverso date le dimensioni determinare le forze, perchè il medesimo abbia luogo. E dal detto nei due articoli precedenti, si fa manifesto, che per calcolare queste cose, sarebbe necessario in generale aver note, ovvero calcolare in generale (124), (152), (153), le quantità

$$2(E_1 \int_0^a Z z^2 z' + E_2 \int_0^b Z z^2 z')$$

$$\frac{R}{\alpha} 2 \left(\int_0^a Z z^2 z' + \eta \int_0^b Z z^2 z' \right)$$

onde dovremmo per la prima aver note E_1 ed E_2 , e per la seconda R ed n .

185. Ma andare così innanzi, nello stato attuale delle conoscenze fisiche della scienza, non è possibile; perciocchè non

conosciamo la relazione che passa tra E_1 ed E_2 , nè qual dovrebbe essere la n ; e sappiamo d'altronde che tra brevissimi limiti soltanto la n può ritenere il medesimo valore, e la E_1 potrebbe avere un rapporto costante alla E_2 : oltre a che questi due moduli non possono davvero essere in pratica quelli che abbiamo considerato che fossero; essendo che all'allungamento od accorciamento più o meno grande delle fibre di un pezzo che si piega, pare dovesse contribuire ancora l'aderenza scambievolmente dei diversi fasci contigui di fibre, che pure colla forza di coesione di queste cospira ad opporsi al loro allungamento.

Però supporremo colli altri autori, come già abbiám fatto innanzi (125), (134) $E_1 = E_2 = E$, e quindi $n = 1$. E vedremo poi come tenere in conto *tale ipotesi*, e quando possa ritenersi aver luogo di fatto.

Così essendo, dovremo imparare a calcolare le formole (XIV) e (L).

$$\epsilon = E \cdot 2 \left(\int_0^{\alpha} Z z^2 z' + \int_0^{\beta} Z z^2 z' \right) = EM$$

$$\rho = \frac{R'}{\alpha} \cdot 2 \left(\int_0^{\alpha} Z z^2 z' + \int_0^{\beta} Z z^2 z' \right) = \frac{R'}{\alpha} M,$$

che hanno per fattore comune la quantità M .

Cominciamo dunque dal calcolare il fattore comune M .

186. Dato geometricamente il perimetro della sezione del pezzo è nota (114) la funzione che è Z di z ; quindi potremo calcolare li due integrali compresi nella M . Ma non potremo definirli che note le α e β . Ora queste le determineremo per le due

$$(LXXIII) \quad \int_0^{\alpha} Z z = \int_0^{\beta} Z z, \quad \alpha = \alpha + \beta$$

che nascono dalle (III), quando $E_1 = E_2$: e già note saranno esse α e β quando fosse nota la posizione del centro di gravità della sezione del pezzo (118, 1.^o), od un suo asse orizzontale di simmetria.

E s'intende, che abbiamo tacitamente supposto essere continua la curva del perimetro della sezione.

Se fosse discontinua, ciascuno degli integrali soprascritti si scomporrà in più integrali definiti tra i limiti pei quali ha luogo la continuità del perimetro. Così che, se il profilo del pezzo fosse quello espresso nella *figura 21*; e fosse ωZ l'asse di equilibrio, ed $\omega P = \alpha_1$, $\omega Q = \alpha_2$, $\omega R = \alpha_3$, $\omega S = \alpha_4$, $\omega P' = \beta_1$, $\omega Q' = \beta_2$, $\omega R' = \beta_3$.

Dovrà farsi per la parte superiore all'asse

$$\int_0^{\alpha} Zz = \int_0^{\alpha_1} Zz + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} Zz + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} Zz - \int_{\alpha_4}^{\alpha} Zz$$

$$\int_0^{\alpha} Zz^2 = \int_0^{\alpha_1} Zz^2 + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} Zz^2 + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} Zz^2 - \int_{\alpha_4}^{\alpha} Zz^2$$

E per la parte inferiore all'asse stesso

$$\int_0^{\beta} Zz = \int_0^{\beta_1} Zz + \int_{\beta_1}^{\beta_2} Zz + \int_{\beta_2}^{\beta} Zz$$

$$\int_0^{\beta} Zz^2 = \int_0^{\beta_1} Zz^2 + \int_{\beta_1}^{\beta_2} Zz^2 + \int_{\beta_2}^{\beta} Zz^2$$

E per ciascuna formola, per la parte superiore, il primo integrale definito s'integrerà eliminandone la Z per mezzo della equazione della retta OA , il secondo eliminandone Z per la equazione della curva AB , il terzo eliminandola per mezzo della equazione della retta BC , il quarto eliminandone Z per la equazione della PF ; e così per la parte inferiore, il primo integrale definito si calcolerà avvalendosi della equazione della retta OA' , il secondo per mezzo della equazione della curva $A'B'$, ed il terzo tenendo presente la equazione della retta $B'C'$.

Per tal modo si avrà una relazione tra le $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, dalla quale coll'altra $a = \alpha_3 + \beta_3$ si determinerà la posizione dell'asse neutrale ωZ , e quindi risultando note tutte le α e β , risulterà noto il fattore M .

Dichiarato il procedimento generale, passiamo alle effettive applicazioni; e scegliamo i casi più utili pella pratica, e li quali possono dar luogo ad importanti conseguenze generali.

187. Sia il pezzo di sezione rettangola, come è espressa nella *figura 22*.

Sia $EF = a$, $GH = b$.

Dividiamo in primo il rettangolo $ABCD$ verticalmente per metà colla EF . Il centro di gravità di questa figura si trova in ω punto medio della EF . Meniamo ωZ . Sono ωZ , ωz li assi coordinati pella sezione del pezzo; e GH l'asse neutrale (114) o di equilibrio.

Quindi $\omega E = \alpha = \omega F = \beta$; ed

$$M = \frac{1}{2} \int_0^a Z z^2.$$

Il perimetro della semisezione $ECBF$, essendo la CB terminata alle ordinate CE , BF , avremo la relazione tra Z e z , appunto dalla equazione della retta BC , che è

$$Z = \frac{1}{a} b$$

ed il limite $\alpha = \omega E = \frac{1}{2} a$.

Dunque

$$M = \frac{1}{2} \int_0^a Z z^2 = 2b \int_0^{\frac{1}{2}a} z^2 = \frac{a^3 b}{12}.$$

Quindi risulta

$$e = EM = \frac{E}{12} a^3 b$$

$$r = \frac{R' M}{\alpha} = \frac{R'}{\frac{1}{2}a} \cdot \frac{a^3 b}{12} = \frac{R'}{6} a^2 b$$

Dunque, in generale, nei pezzi di sezione rettangola il momento di elasticità cresce come la larghezza della sezione ed il cubo della sua altezza; ed il momento di resistenza, come la larghezza ed il quadrato dell'altezza.

E poichè la freccia o ventre di curvatura è sempre tanto minore per quanto più è grande il momento di elasticità; e tanto più possono essere grandi le forze agenti su di un pezzo, senza che perciò lo sforzo che soffrano le fibre che più sono tese o compresse oltrepassi una data misura; ne segue che *come pezzi di resistenza sono sempre da preferirsi quelli che sono più alti che larghi; e che un medesimo pezzo debba mettersi in opera in costa ossia in coltello, e non in piatto.*

188. Avendo noi trovato (132) che, quando un pezzo è posato su due appoggi ed è aggravato nel mezzo da un peso,

Teor. delle Res.

19

rispetto al quale il peso suo proprio è trascurabile, il ventre di sua curvatura è

$$h = \frac{P}{e} \frac{c^3}{48};$$

ne segue, che se il pezzo sarà di sezione rettangola, avremo

$$h = \frac{P}{4E} \cdot \frac{c^3}{a^3b}$$

che si ottiene ponendovi per e il valore trovato nel numero precedente.

189. Mettendo il trovato valore di ρ nel primo membro della (LII) ed anche nel primo della (LV); abbiamo rispettivamente

$$F = \frac{R'}{6} \cdot \frac{a^2b}{c}, \quad P = \frac{2R'}{3} \cdot \frac{a^2b}{c};$$

onde il teorema ricordate nei più antichi libri sul soggetto: cioè, la più gran forza che può reggere un pezzo di cui si mette a cimento la resistenza rispettiva è nella ragione composta, della diretta del quadrato della sua altezza e della semplice della larghezza, e dell'inversa della lunghezza.

190. Se la sezione del pezzo fosse quadrata, basterebbe fare nelle formole precedenti $b=a$. Così fatto risulta

$$e = \frac{E}{12} a^4$$

$$\rho = \frac{R'}{6} a^3.$$

Ed allora è indifferente, il modo col quale si ponga a giacere il pezzo.

Però un *asse rotante dovrà farsi quadrato anzi che rettangolo*.

191. Trovati i valori di e e ρ , tanto per un pezzo di sezione quadrata, quanto per uno di sezione rettangola, possiamo anche meglio convincerci della utilità di fare i pezzi di resistenza più alti che larghi, che non alti quanto larghi.

Vogliasi un pezzo di sezione quadrata, di ugual volume di un pezzo di sezione rettangola.

Chiamato A il lato del pezzo di sezione quadrata; ed a

L'altezza e b la larghezza di quello di sezione rettangola; dovendo il volume esserne uguale, dovrà essere

$$A^2 = ab; \text{ onde } a = \frac{A^2}{b}.$$

Ma pel pezzo di sezione quadrata (190) è

$$r = \frac{E}{12} A^4, \text{ e } p = \frac{R'}{6} A^3$$

e pel pezzo di sezione rettangola (187) è

$$r = \frac{E}{12} a^3 b, \text{ e } p = \frac{R'}{6} a^2 b.$$

Dunque in queste due ultime espressioni, ponendo in vece di a , $\frac{A^2}{b}$ otterremo

$$r = \frac{E}{12} \frac{A^6}{b^2}, \quad p = \frac{R'}{6} \frac{A^4}{b};$$

e conosceremo, che se con pari quantità di materia si faccia prima un pezzo quadrato, e poi un pezzo rettangolo; la resistenza del primo starà alla resistenza del secondo,

per la flessione $:: 1 : \frac{A^2}{b^2}$

per la rottura $:: 1 : \frac{A}{b};$

e poichè è sempre $b < A$, si vede, quando cresce enormemente la resistenza di un pezzo a misura che si vada assottigliando in larghezza, e crescendo in altezza.

Così abbiassi un pezzo quadrato di 8 once di lato; e supponiamo che dalla stessa materia vogliasi fare un pezzo rettangolo di uguale lunghezza, ma largo once 2.

La resistenza alla flessione del primo pezzo starebbe a quella del secondo

$$:: 1 : \left(\frac{8}{2}\right)^2 :: 1 : 16$$

cioè nel pezzo rettangolo la resistenza alla flessione sarebbe sedici volte più grande che nel pezzo quadrato; e la resistenza alla rottura del pezzo quadrato, starebbe a quella del pezzo rettangolo

$$:: 1 : \frac{8}{2} :: 1 : 4$$

cioè quella del rettangolo sarebbe quattro volte più grande di quella del pezzo quadrato.

E di qui si vede, quanto mal s'avviserebbe chi, dovendo fare eseguire di ferro fuso un pezzo di resistenza, il facesse fare di sezione quadrata, anzi che di sezione rettangola: parimenti, quanto male si comporterebbe chi, avendo dei fusti d'alberi, per cavarne delle travi squadrate, ne le facesse cavare di sezione quadrata, anzi che di sezione rettangola: e quanto *sconvenevole* sia mettere i pezzi rettangoli in piatto anzi che in costa, come pur dicevamo di sopra (187).

192. Da ciò che abbiamo detto nei tre numeri precedenti potrebbe inferirsene che sarebbe utile molto fare una trave, od altro pezzo di cui debba mettersene a cimento la resistenza rispettiva, quanto più si possa esile nel senso normale alle forze estrinseche che debbono agirvi su, e per quanto più alto si possa nell'altro senso.

Ma ciò, se è vero matematicamente, è a pensare, che perchè il fosse pur fisicamente, sarebbe necessario che niuna altra forza, comunque minima ed istantanea venisse a turbare il sistema; e che fosse possibile fare così che le forze estrinseche passassero proprio pel piano di simmetria del pezzo, e che non mai potessero uscirne fuori. Le quali circostanze *non potendo avere davvero luogo*, i pezzi esilissimi nel senso orizzontale potrebbero torcersi, e quindi uscire dalla positura verticale in cui stanno, e rovesciarsi da un lato: come possiamo rendercene ragione per la decomposizione della forza F indicata nella (*fig. 25.*) in cui $ABCD$ indica la sezione del pezzo poggiato sul lato più stretto AB . E di quanto danno potrebb'essere il rovesciarsi del pezzo, non v'è chi non veda.

Di qui la necessità di ovviare all'inconveniente. E per questo più mezzi vi sono.

Il primo e più semplice è quello di non assottigliare il rettangolo $ABCD$ oltre un certo limite. Il secondo di corroborarlo con dei rinforchi o costole. Il terzo di accoppia-

re insieme due rettangoli, così che si ajutassero l'un l'altro a non torcersi e rovesciare; e così da costituire coi due legami superiore ed inferiore una specie di tubo rettangolo.

Nulla essendo da aggiungere al già detto in ordine al primo mezzo, passiamo a dirittura a considerare il secondo. Ed è evidente che in diversi modi può corroborarsi con rinfianchi un rettangolo. Esaminiamone i più importanti.

193. Supponiamo in primo che il rettangolo $ABCD$, (fig. 24.) nel mezzo della sua altezza AD , sia corroborato da due rinfianchi uguali $EFGH$, $NLKI$, l'uno a destra, e l'altro a sinistra. Sia $z'z$ l'asse di simmetria della sezione. Pel modo, come è composta la sezione, se tiriamo la $Z'Z$ che divide per mezzo il rettangolo $FEKL$, sarà $Z'Z$ la posizione dell'asse neutrale (186) (quando $E_1=E_2=E$).

Facciamo

$AD=a$ = altezza totale della sezione,

$DC=b$ = larghezza del rettangolo medio,

$FE=a_1$ = altezza comune dei rinfianchi,

$IK+EH=b_1$ = larghezza unita dei due rinfianchi, ossia doppia larghezza di uno di essi.

La retta KL avrà per equazione

$$Z = \frac{b+b_1}{2};$$

e la BC avrà per equazione

$$Z = \frac{b}{2}.$$

I limiti della oK sono zero ed $\frac{a_1}{2}$ e quelli della IC sono $\frac{a_1}{2}$

ed $\frac{a}{2}$. Quindi sarà

$$M = 2(b+b_1) \int_0^{\frac{a_1}{2}} z^2 + 2b \int_{\frac{a_1}{2}}^{\frac{a}{2}} z^2 = \frac{2(b+b_1) \left(\frac{a_1}{2}\right)^3}{3} + \frac{2b \left[\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^3 \right]}{3}$$

e fatte le riduzioni

$$M = \frac{a^3b}{12} + \frac{a^2b_1}{12}.$$

Onde poi

$$\epsilon = \frac{E}{12} (a^3b + a_1^2b_1)$$

$$\rho = \frac{R'}{6} \frac{a^3b + a_1^2b_1}{a}$$

194. Supponiamo che volesse farsi un pezzo di questa sezione, ma colla stessa quantità di materia di un pezzo semplicemente rettangolo. Essendo A e B l'altezza e larghezza del pezzo rettangolo, dovremo avere

$$AB = ab + a_1b_1,$$

e quindi

$$a_1^2b_1 = \frac{(AB - ab)^3}{b_1^2}.$$

Ed il fattore M espresso in A e B , sarà

$$M = \frac{a^3b}{12} + \frac{(AB - ab)^3}{12b_1^2}.$$

Onde se le a , b , saranno date, e preso a molto grande rispetto a b , la M , e perciò i momenti di elasticità e di resistenza, cresceranno a misura che scema la b_1 e che perciò cresce la a_1 . Però questa positura dei rinfianchi vale a corroborare il pezzo in quanto alla stabilità per traverso, ma non in quanto alla resistenza. Per questo sarebbe meglio che tutta la materia impiegata nei rinfianchi s'impiegasse ad allargare il rettangolo $ABCD$, per modo che venisse

$$AB = a(b + b_1);$$

perciocchè allora b_1 avrebbe il più piccolo valore possibile. Però i rinfianchi, come sono indicati nella (fig. 24.), non sono utili davvero in quanto alla resistenza, fino a tanto che il pezzo deve giacere nella positura indicata; e sarà quindi meglio portare i rinfianchi verso gli estremi del pezzo, come indica la (fig. 29). Ma sarà vantaggiosa quella sezione, se il pezzo dovesse giacere talora nel senso indicato e tal altra in senso contrario.

Se il pezzo colla stessa quantità di materia ridotto rettangolo in $abcd$, nel qual caso offre la maggiore resistenza, si ponesse come indica la (*fig. 25.*) di piatto, la sua resistenza scemerebbe grandemente (191). Non così se avesse i rinforchi, come indicati nella (*fig. 24.*); e soprattutto quando la intera ampiezza $EK=b+b_1$ fosse uguale all'altezza $AD=a$, e l'altezza $KL=a_1$ uguale alla larghezza $DC=b$. Allora, o che il pezzo stia col rettangolo $ADCB$ verticale, o che stia così coll'altro $EKLF$ la resistenza sarà la stessa sempre, e con grande vantaggio.

195. Poniamo nelle formole del numero 193,

$$b_1+b=a, \text{ ed } a_1=b$$

la M diventa

$$M=\frac{a^3b}{12}+\frac{(a-b)b^3}{12}:$$

e sempre la medesima, o che sia verticale il rettangolo $ABCD$, o che il sia l'altro $EFLK$. Egli è per questa ragione, che questa sezione ottimamente conviene a quei pezzi su dei quali la forza che tende a fletterli può agire ora in un senso ed ora in un altro; o che comunque vi agisse sempre in un senso, potessero talora i movimenti cui debbono andare soggetti produrre resistenze o sforzi che pure agissero sur essi per fletterli in altro senso.

Quindi di tal sezione sogliono talora farsi gli alberi rotanti, li alberi verticali delle potenti grue, e le lunghe aste connettitrici delle manovelle delle potenti macchine a vapore.

Pertanto i momenti di elasticità e di resistenza per questi pezzi sono

$$e=\frac{E}{12}[a^3b+(a-b)b^3]$$

$$p=\frac{R}{6}[a^2b+(1-\frac{b}{a})b^3]$$

e vedesi che tanto maggior vantaggio si ottiene, quanto più b ossia la larghezza della sezione è piccola.

Talora, la sezione non è proprio quella della *fig. 26.* ma come è espressa dalla 27, od anche dalla 28; e pur

mondimento può farsi anche allora liberamente uso delle formole precedenti, trascurando l'effetto delle porzioni aggiunte provenendone da queste vantaggio alla resistenza, senza grande discapito della economia (a).

Intanto comunque la sezione della *fig. 26.*, è utile pei detti riguardi; pure come abbiamo accennato (194), quando il pezzo deve giacer sempre nello stesso verso, è meglio allontanare i rinflanchi verso li estremi come è espresso nella (*fig. 29.*). Ed è evidente che se il pezzo dovesse essere posato su due o più appoggi e sempre nel medesimo verso, la sezione espressa nella *fig. 24.* non potrebbe convenire; e che dovrebbe convenire meglio l'altra della *fig. 29.*, e per offrire più stabilità nella sua positura e per essere più resistente. Passiamo dunque ad occuparci, dei pezzi di questa sezione.

196. Consideriamo i pezzi della sezione espressa nella *fig. 29.*, corroborati da rinflanchi posti sì alla cima, che alla base di essa. E per calcolare il fattore *M* per tale sezione, facciamo

$BC=a$ =altezza del pezzo,

$AB=b$ =larghezza in centro,

$EF=a_1$ =altezza dei fianchi in cima,

$FG=\frac{b_1}{2}$ =larghezza di ciascun fianco in cima,

$IK=a_2$ =altezza dei fianchi in base,

$AK=\frac{b_2}{2}$ =larghezza di ciascun fianco in base.

(a) Le porzioni aggiunte valgono a rendere alquanto più resistente il pezzo; onde niuno inconveniente ne proviene nella pratica facendo uso delle dette formole per le sezioni precedenti. Ma le porzioni aggiunte sono necessarie per la costruzione dei pezzi; e tengono proprio alla *stabilità di costruzione*. Se il pezzo è di legno, il rinflanchi non potrebbero saldamente armarsi, senza le porzioni aggiunte, che allora diconsi *membrì completivi*. Se il pezzo è di metallo fuso, le porzioni aggiunte sono necessarie pei buoni effetti del raffreddamento del getto.

Sia $z'z$ la retta di simmetria della sezione. Dovremo anzi tutto trovare la posizione dell'asse di equilibrio $Z'Z$, la di cui distanza da DC al solito la chiamiamo α , mentre chiamiamo β la distanza sua dalla KK' .

La equazione della retta $I'K'$ sarà

$$Z = \frac{b+b_2}{2}$$

ed i suoi limiti $z = -(\beta - a_2)$, $z = -\beta$.

Quella della retta $II'G'$

$$Z = \frac{b}{2}$$

ed i suoi limiti $z = -(\beta - a_2)$, $z = (\alpha - a_1)$.

E la equazione della $E'F'$

$$Z = \frac{b+b_1}{2}$$

ed i suoi limiti $z = (\alpha - a_1)$, $z = \alpha$.

Quindi per le equazioni (LXXIII) delle forze intrinseche (186), avremo per la prima

$$b \int_0^{\alpha-a_1} z + (b+b_1) \int_{\alpha-a_1}^{\alpha} z = b \int_0^{\beta-a_2} z + (b+b_2) \int_{\beta-a_2}^{\beta} z$$

che, fatte le integrazioni e le riduzioni si trasforma nell'altra

$$b\alpha^2 + a_1 b_1 (2\alpha - a_1) = b\beta^2 + a_2 b_2 (2\beta - a_2),$$

e la seconda resterà

$$\alpha + \beta = a.$$

Le quali equazioni risolte rispetto ad α e β danno

$$\alpha = \frac{a^2 b + a_2 b_2 (2a - a_2) + a_1^2 b_1}{2(ab + a_1 b_1 + a_2 b_2)}$$

$$\beta = \frac{a^2 b + a_1 b_1 (2a - a_1) + a_2^2 b_2}{2(ab + a_1 b_1 + a_2 b_2)}.$$

E così tagliato $\omega = \alpha$, e condotto per ω la $Z'Z$ sarà questa l'asse neutrale: e dalle formole di sopra si vede che si accosta ai fianchi di più grande aja.

Il fattore M sarà (186)

$$M = b \int_0^{\alpha-a_1} z^2 + (b+b_1) \int_{\alpha-a_1}^{\alpha} z^2 + b \int_0^{\beta-a_2} z^2 + (b+b_2) \int_{\beta-a_2}^{\beta} z^2$$

E fatte le integrazioni e le riduzioni

$$M = \frac{1}{3} \{ b(\alpha^3 + \beta^3) + a_1 b_1 [3\alpha(\alpha - a_1) + a_1^2] + a_2 b_2 [3\beta(\beta - a_2) + a_2^2] \}$$

ove per α e β si metteranno i valori di sopra.

Teor. delle Res.

197. Se i fianchi in cima ed in base fossero tutti quattro uguali, come nella *fig. 30*; sarà

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad \text{ed } \alpha = \beta = \frac{a}{2}.$$

Ed il fattore M diventa

$$M = \frac{a^2 b}{12} + \frac{a_1 b_1}{6} (3a^2 - 6aa_1 + 4a_1^2).$$

E quindi si avrà pel momento di elasticità

$$\epsilon = \frac{E}{12} \{ a^3 b + 2a_1 b_1 [3a(a - 2a_1) + 4a_1^2] \},$$

e pel momento di resistenza

$$\rho = \frac{R'}{6} \left\{ a^2 b + 2a_1 b_1 \left[3(a - 2a_1) + 4\frac{a_1^2}{a} \right] \right\}$$

e tutto il secondo termine di ciascuna di queste espressioni è la forza aggiunta dai rinflanchi (187); e vedesi che questa giunta è tanto più grande per quanto più $a - 2a_1$, ossia la distanza GH dei fianchi è grande, e per quanto più è grande b_1 ossia la larghezza FG dei medesimi.

Dunque i pezzi di sezione rettangola corroborati da rinflanchi uguali in cima ed in base, a tutte le altre cose uguali, sono tanto più resistenti per quanto più i rinflanchi sono larghi e sottili.

Questa forma è adattatissima per travature; o per altra sorta di correnti soggetti a gagliarda forza estrinseca che ne mette a cimento la resistenza rispettiva.

E tale è la forma delle rotaje di strade ferrate più comunemente in uso, come vedesi nella *fig. 32*: se non che gli angoli dei rinflanchi, quivi sono arrotonditi. Non pertanto per esse può farsi ottimamente uso delle formole di sopra.

198. Supponiamo che la trave sia così fatta coi rinflanchi uguali, che la sua larghezza totale EE' sia uguale alla sua altezza totale α^2 ; ed in oltre che sia anche l'altezza EF' dei rinflanchi uguale alla larghezza HH' del rettangolo centrale $ABCD$. Così essendo, sarà nelle formole del numero precedente

$$a_1 = b, \quad \text{e} \quad b_1 = a - b$$

dalle quali si ha

$$a_1 b_1 = ab - b^2.$$

Sostituiti questi valori di a_1 ed $a_1 b_1$ nel precedente valore di M , risulta (dopo le riduzioni)

$$M = \frac{7a^3b}{12} - \frac{b^2}{6}(9a^2 - 10ab + 4b^2).$$

E si avrebbe la più grande resistenza possibile, quando fosse $4b^2 - 10ab + 9a^2 = 0$.

Ma risolta questa equazione rispetto a b , si ottiene un valore immaginario. Dunque il più gran valore di M sarà sempre inferiore a $\frac{7a^3b}{12}$.

Supponiamo che fosse

$$b = \frac{a}{10}.$$

Risulta

$$M = \frac{337a^4}{7500}.$$

199. Or supponiamo aversi un solo rettangolo la di cui larghezza chiamiamo B , di uguale altezza della sezione della trave che consideriamo, sarà

$$\begin{aligned} aB &= a^2 - (a-2b)(a-b) \\ aB &= 3ab - 2b^2. \end{aligned}$$

Ma pel rettangolo la M è uguale (187) alla dodicesima parte del cubo dell'altezza nella larghezza. Dunque pel pezzo rettangolo, equivalente in volume alla trave che consideriamo sarà

$$M = \frac{a^3B}{12} = \frac{3a^3b - 2a^2b^2}{12}.$$

Ed ove sia $b = \frac{a}{10}$

$$M = \frac{a^3B}{12} = \frac{28a^4}{1200} = \frac{7a^4}{300}.$$

Ma abbiamo trovato per la trave anzidetta (198), di spessore un decimo dell'altezza,

$$M = \frac{337a^4}{7500}.$$

Dunque se colla stessa quantità di materia con che è fatta una trave rettangola, se ne faceva un'altra con rinfian-

chi così, che la sua larghezza totale sia uguale alla sua altezza, e questa quanto quella dell'altra trave, e la spessore dei rinfilanchi e del rettangolo centrale la decima parte di essa altezza, *la resistenza del pezzo a rinfilanchi sarà poco più dei diciannove decimi di quella della trave senza rinfilanchi.*

Queste due sezioni equivalenti sono rappresentate in proporzione nella (fig. 31). Il pezzo della seconda sezione è certo diciannove decimi più resistente che quello della prima; così che, se si avesse un pezzo di ferro fuso rettangolo capace di sostenere un peso di 200 cantiaia, che ne mette a cimento la resistenza rispettiva; e con esso, se ne gettasse un altro di uguale altezza, con rinfilanchi in cima ed in base per modo che la larghezza del pezzo fosse uguale all'altezza, e lo spessore del metallo nel rettangolo e nei rinfilanchi uguale alla decima parte dell'altezza, questo nuovo pezzo reggerebbe senza maggiore sforzo un peso di 380 cantiaia (a).

200. Se i fianchi sono piccoli, come è indicato nella (fig. 32), possono i pezzi resistenti farsi di ferro malleabile tirato al laminatoio. E parimenti si potrebbero se i fianchi fossero grandi; ma questi sogliono farsi più comunemente di ferro fuso; e potrebbero farsi ancora di legname. In questo caso dovrebbero comporsi di più pezzi, commessi tra loro, come è indicato nella (fig. 33) od in altra guisa; e sogliono anche guernirsi di membretti architetonici, come la (fig. 34) ne dà un esempio: ma di tali membretti non si tien conto: e così suol farsi ancora nei pezzi di ferro fuso, come indica la (fig. 35).

201. Sul medesimo principio del *grande aumento di resistenza, che offrono i pezzi a rinfilanchi in cima ed in base*, sono costrutte le grandi travate dei ponti di struttura mista. Qui non è il luogo di entrare in questi dettagli. Ma pure ci piace darne il profilo di uno, che stimiamo della migliore composizione. È rappresentato nella (fig. 36).

(a) Questo è detto, senza tener conto della piccola perdita di materiale, proveniente dalla fusione.

Le AD, CB , sono delle lamine di ferro messe in costa; e le porzioni costituenti fianchi sono dei correnti di ferro malleabile *angolari* che afferrono immezzo gli orli inferiore e superiore di esse lamine, e che sono con esse e tra essi saldamente connesse per via di perni. Quelle costituiscono, come un pezzo rettangolo esilissimo messo in costa, che già ha grande resistenza riguardo avuto alla quantità di materia; perciocchè comunque la grossezza b sia piccola, pure la a^3 è comparativamente grandissima (187). I correnti di ferro battuto angolare mentre corroborano e rendono stabile la trave, così che allontanano gli inconvenienti notati al n.° 192, ne fanno crescere pure grandemente la resistenza; perciocchè per essi le z , che entrano nelle espressioni delle somme dei momenti delle forze intrinseche che si sviluppano $\int Zz^2 z'$, sono tutte assai grandi: ed ove si volessero calcolare potrebbonsi per le norme date al n.° 186.

202. Spesso sogliono sopprimersi i fianchi superiori; nel qual caso la sezione, che risulta, come indicata nella (*fig. 57.*), dicesi a T. E questa sezione torna utile per quei pezzi, che volendosi fare molto più alti che grossi, e quindi assai stretti, debbono d'altronde sostenere sur essi delle tavole o lastre; nel qual caso le impernature od inchiodature si fanno appunto nei rinflanchi, come il denota la *fig. 58.* Ma le quali non ne scemano la resistenza, quando essi rinflanchi cadono da quella parte onde, piegandosi il pezzo, diventa concava, e ciò per le ragioni, che diremo appresso.

203. Tal altra volta sogliono sopprimersi in vece i due fianchi superiori, come è indicato dalla *fig. 59.* In questo caso nelle formole generali del n.° 196 deve farsi $a_1=0$, $b_1=0$.

Risulta

$$\alpha = \frac{a^2 b + a_2 b_2 (2a - a_2)}{2(ab + a_2 b_2)}$$

$$\beta = \frac{a^2 b + a_2^2 b_2}{2(ab + a_2 b_2)},$$

$$\text{ed } M = \frac{1}{8} \{ h(a^3 + \beta^3) + a_2 b_2 [3\beta - a_2] + a_2^3 \} \},$$

ove, messi poi i calcolati valori di α , β , si ha il valore di M

e quindi i momenti di elasticità e di rottura. E pertanto si vede anche quì il vantaggio di fare i rinfianchi più larghi che alti.: ed è palese valere queste formole ancora pel caso in cui il pezzo a T è diritto, come indica la *fig. 37*, e non rovescio come l'indica la *fig. 39*.

204. Nei travi di ferro fuso s'è trovato utile non solo sopprimere quasi del tutto i rinfianchi superiori, ma di fare in oltre l'area dei due inferiori uguale insieme ai due terzi di tutta la sezione, come l'indica la *fig. 40*.

Non tenendo conto dei piccoli rinfianchi superiori che sono, come veri membretti completivi, (e che servono per fare risultare più certamente a *fio* il getto del ferro fuso), troveremo il fattore *M* per tali pezzi, facendo nelle formole del numero precedente, $a_2b_2=2ab$. E risulta, dopo fatta la sostituzione di $2ab$, ove è a_2b_2 , e le riduzioni

$$\alpha = \frac{5a - 2a_2}{6}$$

$$\beta = \frac{a + 2a_2}{6}$$

E quindi il fattore

$$M = \frac{a^3b}{12} + \frac{ab}{6}(a^2 - 2aa_2 - 2a_2^2)$$

e vedesi che questo fattore è tanto più grande, e perciò tanto più grande il momento di elasticità e quello di resistenza, per quanto più a_2 è piccola, ed a grande.

Pertanto avremo, in questo caso, pel momento di elasticità

$$e = \frac{E}{12}[a^3b - 2aba_2(a + a_2)]$$

e pel momento di resistenza

$$p = \frac{R'}{6}[a^2b - 2ba_2(a + a_2)].$$

E tal sezione suole essere ricevuta, come la più acconcia per le travi di ferro fuso (a).

(a) L'Ingegnere I. Glynn nel suo libro sulle capre e le grue dice che il signor Hodgkinson ha dimostrato, nei fatti sperimenti, che questa sezione conviene più che ogni altra alle travi di ferro fuso: mentre un pezzo

205. Passiamo ora a considerare l'altro mezzo (192) di rendere stabili i pezzi rettangoli di resistenza; accoppiandone cioè insieme due (fig. 44.) di sezione rettangola $A\beta\alpha D$, $B\beta'\alpha'C$ e commettendoli per mezzo di altri due rettangoli l'uno superiore $CDGG'$ e l'altro inferiore $ABH'H$; e costituenti insieme una specie di sezione tubulare rettangola.

Tiriamo la EK che divide per mezzo la figura; e pel punto ω la orizzontale $Z'Z$, che sia l'asse neutrale da determinarsi.

Dopo il fin qui detto, non occorre calcolare da capo, pei pezzi di questa sezione, il fattore M dei momenti di elasticità e di resistenza; perciocchè questa medesima sezione si otterrebbe dividendo in due secondo $\alpha\beta$ quella della (fig. 29), e mettendo in fuori ciò che è nel mezzo e viceversa; e solo dovrà farsi nelle formole del n.º 196, $b_1=b_2$.

206. Se le porzioni (fig. 44.) $CDGG'$, $ABH'H$ sono uguali, l'asse neutrale $Z'Z$ dividerà immetto la sezione, e varranno le formole del numero 197.

Ma è chiaro, che allora il fattore M dovendo essere quello

così conformato, posato su due appoggi orizzontali rompesi sotto più gran peso, a paragone di quello sotto cui rompesi un pezzo di uguale lunghezza e di sezione diversa dalla precedente, ma ad essa equivalente. E ne dà la formola pel fattore M , supponendolo uguale a quello competente al rettangolo $EKK'E'$, meno quello competente al due rettangoli $IHHDE$, $CHH'E'$, se fossero pieni, presi insieme: e supponendo che per tutti e tre fosse $\alpha=\beta$, come se l'asse neutrale vi avesse due posizioni diverse. Lo che se possa o no farsi, ognun vede.

La più grande resistenza che il pezzo di tal sezione offra nel caso della rottura poteva provenire da che in un tal caso essendo la $R_2 < R_1$; non si può supporre che queste sieno uguali e quindi anche $\alpha=\beta$, che quando il numero delle fibre verso la convessità è maggiore di quello verso la concavità.

Ma convenga ciò pure pel caso effettivo della rottura. È evidente non potere convenire punto nei casi più comuni della pratica, nei quali essendo sempre necessario che il pezzo non perda di sua elasticità, deve mettersi a cemento (come più ampiamente dichiareremo appresso) una resistenza rispettiva, assai inferiore a quella della rottura.

Quindi si fa manifesto con quale circospezione debbano riceversi certe massime, che comunque fondate sulla osservazione, pure non possono, senza gravi riguardi, generalizzarsi.

che si otterrebbe se il cavo non esistesse, meno quello che a questo cavo si appartiene, facendo

$\alpha^3 = A =$ altezza totale del tubo

$\alpha' = B =$ larghezza totale del tubo

$GH = a =$ altezza del vuoto

$GG' = b =$ larghezza del vuoto stesso, sarà

$$M = \frac{A^3 B - a^3 b}{12}.$$

Nè occorre qui il ripetere, come questa sezione, in fronte ad un'altra rettangola e di uguale quantità di materia, favorisca la resistenza, come facevano i pezzi a rinfianchi; e che tanto più sarà grande la resistenza per quanto più esili sono le pareti laterali del tubo.

Ma le travi conformate secondo questa sezione hanno un'altro vantaggio su quelli a rinfianchi, quando, e per la grande loro tratta, e pei grandi pesi da sopportare, debbano essere di grandi dimensioni: ed è di potere essere percorse da un peso mobile pel loro interno, ossia per su la parte inferiore $ABH' H$; perciocchè allora il centro di gravità di tutto il sistema va in giù, ed anche per questo riguardo ne cresce la stabilità. In questo caso però le larghezze Hh , $H'h'$ debbono essere valutate coi principii pertinenti alla resistenza assoluta positiva: ed anche bisogna por mente all' altezza KI del rettangolo inferiore del tubo, potendosi esso staccare secondo le AH , BH' dalle parti laterali, allo che si oppone la resistenza di Adesione (20); ma perchè una tale resistenza non è sempre bene conosciuta, o ciò richiederebbe troppo alti i tratti AH , BH' ; sogliono queste parti corroborarsi in vece per altri mezzi più efficaci, che sono di costruzione.

207. Su questi principii sono fondati i ponti a grande portata detti *tubulari*; tra i quali è famoso il Ponte Britannia, con travate della enorme tratta di pal. 530, e che lascia passare pel suo interno un intero treno di locomotiva; e sul principio medesimo sono fondati i ponti di leguo, pure di grande portata, detti *americani*: se non che questi sogliono avere i fianchi *raticolati*; e li uni e li altri sono formati di più pezzi commessi insieme per via di perni o chiodi di varia natura,

capaci di opporre *resistenza di costruzione* di misura maggiore dell'assunta frazione del modulo di resistenza rispettiva: senza di che *non potrebbero applicarsi* le formole precedenti per determinarne *con sicurezza* le dimensioni, e con sufficiente approssimazione la *freccia presumibile di curvatura* che possono prendere, quando il peso mobile, che debbe percorrerlo, passa pella sua sezione equidistante dalli appoggi; nel qual caso appunto (168) il ventre è massimo.

208. Calcoliamo ora la *M* pei pezzi di sezione circolare, li quali, quantunque da remotissimo tempo usati, pure sono ancora frequentemente adoperati tra noi, per sostegno dei coverti delli edifizii, o dei pavimenti, a causa della bontà dei lunghi travi di castagno, e per le loro dimensioni, per lo che se ne impiegano l'interi fusti, senza nessun taglio preventivo. *Il quale vantaggio soltanto*, ne può tuttora giustificare l'impiego; mentre dal detto innanzi, si fa manifesto, che *a pari quantità di materia, una trave a sezione circolare, esser deve meno resistente di una a sezione rettangola*; perciocchè in quella sono molto più elementi della sezione prossimi all'asse neutrale che non in questa, e la resistenza tanto più cresce, per quanto più gli elementi della sezione si allontanano in vece da esso asse.

Sia (fig. 42) *ABCD* la sezione del pezzo. Il circolo, essendo simmetrico intorno ad ogni suo diametro, tiriamo i due *AC, BD* ad angolo retto; e se il primo l'assumiamo come asse verticale di simmetria, il secondo sarà l'asse neutrale: e sarà *AC* l'asse delle ascisse *z*, *DB* quello delle ordinate *Z*, e nel centro ω ne starà la origine. Quindi essendo

$$Z^2 + z^2 = r^2,$$

la equazione del circolo, perimetro della sezione; sarà

$$\begin{aligned} M &= 4 \int_0^r Z z^3 = 4 \int_0^r z^3 \sqrt{r^2 - z^2} \\ &= 4 \int_0^r \frac{r^2 z^3}{\sqrt{r^2 - z^2}} - 4 \int_0^r \frac{z^4}{\sqrt{r^2 - z^2}} \end{aligned}$$

e ponendovi $z = rx$, si ha

$$M = 4r^4 \left(\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} - \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} \right).$$

Teor. delle Res.

21

Pel primo integrale abbiamo

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} &= \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} \\ &= -x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

e passando l'ultimo termine al primo membro, e quindi prendendo $\frac{\pi}{2}$ del tutto la metà

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \Lambda \cdot \text{sen. } x.\end{aligned}$$

Pel secondo integrale abbiamo

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{1}{4}x^3\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{4} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\frac{1}{4}x^3\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \Lambda \cdot \text{sen. } x \right).\end{aligned}$$

E definendo gli integrali trovati tra li indicati limiti

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{\pi}{4} \\ \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{3\pi}{16}.\end{aligned}$$

Onde risulta

$$M = 4r^4 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{16} \right)$$

ossia

$$M = \frac{\pi r^4}{4} = 0,7854 r^4;$$

od anche, chiamandone d il diametro, prossimamente

$$M = 0,05 d^4 = \frac{d^4}{20}$$

E quindi sarà il momento di elasticità

$$e = \frac{E}{20} d^4$$

e quello di resistenza

$$r = \frac{R'}{10} d^3.$$

209. Se si avesse un pezzo quadrato di uguale quantità di materia di questo circolare e di lato a , sarebbe

$$\frac{\pi d^2}{4} = a^2; \text{ onde } d^4 = \frac{16 a^4}{\pi^2}.$$

Quindi la M del numero precedente riuscirebbe

$$M = \frac{a^4}{12,337}.$$

E paragonando questa espressione con quella del num. 187, quando vi si fa $a=b$, si fa chiaro di quanto scema la resistenza di un pezzo circolare rispetto a quella di un pezzo di sezione quadrata, quando entrambi fatti di uguale quantità di materia; e quindi, come dicevamo (208), *quanto tutte le sezioni considerate innanzi favoriscano la resistenza, più che non fa la sezione circolare.*

210. Più resistente del precedente sarebbe un pezzo a canale, o tubulare a sezione circolare, come rappresentato dalla *fig. 43.*

Chiamato D il diametro esterno DB , e d l' interno db , viene

$$M = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{D}{2}} z^2 \sqrt{\frac{D^2}{4} - z^2} dz - \int_0^{\frac{d}{2}} z^2 \sqrt{\frac{d^2}{4} - z^2} dz$$

onde poi prossimamente

$$M = \frac{D^4 - d^4}{20} = \frac{(D^2 + d^2)(D^2 - d^2)}{20}.$$

Quindi

$$e = \frac{E}{20} (D^4 - d^4)$$

$$p = \frac{R'}{10} \frac{(D^4 - d^4)}{D}.$$

Se chiamiamo δ la grossezza del tubo, sarà

$$\delta = D - d, \text{ ossia } d = D - \delta.$$

E viene allora

$$M = \delta (2D - \delta) [D^2 + (D - \delta)^2]$$

e si fa manifesto che un tubo a sezione circolare è tanto più resistente, per quanto è più grande in diametro e piccolo in ispessore della materia di che è fatto.

Onde può conchiudersi che una trave rotonda di ferro fuso, non mai dovrebbe farsi piena, ma sempre cava; e che la migliore trave rotonda sarebbe di lamina di ferro, od anche di rame battuto. Ma un tubo di ferro fuso a sezione circo-

lare può esser fatto tutto di un pezzo. Non così uno di lamina di ferro o di rame. La lamina piegata va inchiodata od anche saldata; ed accurati esperimenti fatti dal Professore Fairbairn, mostrarono che questi tubi *ordinariamente* vengon meno nelle inchiodature. Ma i pesi di che van caricati i pezzi di resistenza esser debbono molto minori di quelli che potrebbero romperli, senza di che tutte le formole teoriche, come già più volte abbiám detto, e come meglio diremo appresso, non reggerebbero. Dunque ritorna sempre il vantaggio, ed anche la convenienza dell'impiego di lamine per li pezzi di resistenza a canali rotondi.

211. Intanto trovato il fattore M , può facilmente calcolarsi il momento ϵ di elasticità, e l'altro ρ di resistenza rispettiva, come già abbiám fatto per la più parte dei pezzi contemplati; e quindi potrebbe anche calcolarsene la freccia, o ventre di curvatura, e le dimensioni dei pezzi o le intensità delle forze o pesi. Ma ciò non faremo, riducendosi a sole sostituzioni algebriche: e ci contenteremo, pei pezzi di più frequente uso, riportarne i risultati nell'articolo seguente, ove riepilogheremo le cose dette in questo e nel precedente.

212. Osserveremo in vece, come da tutto ciò che abbiám detto nel calcolare il fattore M per pezzi di varie sezioni, si rende manifesto, che la teoria ci conduce a norme certe per ottenere colla minima quantità di materia la più grande resistenza possibile; la qual cosa è importantissima, non solo per la economia, ma molto più per la leggerezza che può ottenersi nei pezzi, sia di resistenza sia di trasmissione: perciocchè, così facendo, ed i piediritti, ed i pezzi tutti sostenitori sono meno gravati, e quindi possono farsi meno robusti; e minori riescono li attriti che sono proporzionali alle pressioni, che li organi mobili delle macchine fanno sui fissi.

Or egli è per questo medesimo riguardo che sono di utilità grande i pezzi di ugual resistenza, li quali sono appunto tali da offrire la necessaria resistenza e non oltre. Ma essi dovrebbero avere tali forme, per cui non sempre potrebbero essere adattati agli usi pratici. Così abbiám veduto (172-183)

che se tali pezzi hanno le facce laterali piane e parallele, debbono avere le altre due facce o cilindriche o piane egualmente inclinate all'orizzontale, come ne mostrano le sezioni longitudinali espresse dalla (*fig. 44.*) alla (*fig. 20.*). La qual cosa, stando alla teoria, debb'essere; perciocchè le sezioni trasversali di tutti questi pezzi essendo rettangole, l'asse neutrale deve dividerle per mezzo, e prima d'incurvarsi il pezzo, tutti tali assi stanno in un medesimo piano orizzontale intorno al quale tutte le sezioni del pezzo sono simmetriche, e quindi il pezzo istesso. Ma intanto nelle applicazioni non sempre convengono pezzi le di cui facce non parallele siano curve; e spesso si ha bisogno di pezzi, di cui debbe mettersene a cimento la resistenza rispettiva, li quali abbiano la faccia superiore che sia pure un piano orizzontale. Per tal caso è invalsa la pratica (che pur sarebbe erronea secondo la teoria) di non portare il valore dell'ordinata della curva, competente al profilo longitudinale di un pezzo di ugual resistenza, dato dalle equazioni trovate innanzi, tanto da sopra quanto da sotto dell'asse delle x , ma di portarlo due volte dalla medesima parte. Ed il fatto mostra, che comunque allora molto si è lontani dalla teoria, pure si riesce allo scopo di avere maggiore resistenza colla medesima quantità di materia, nè resistenza in alcuni luoghi molto al di là del bisogno. Così in vece dei profili denotati colle *fig. 44, 45, 46, 47, 48, 49 e 20* si adotterebbero rispettivamente li altri espressi nelle *fig. 44, 45, 46, 47, 48, 49, e 50.*

213. Per avere maggior leggerezza nei pezzi, non solo si sogliono fare di sezioni per traverso, che sotto uguale quantità di materia offrono maggiore resistenza; ed anche col profilo longitudinale secondo che competono a quelli di ugual resistenza; ma ancora, e soprattutto in questi ultimi, vi si praticano talvolta dei vuoti per traverso, come è dimostrato nelle *fig. 51, e 52*, che rappresentano l'uno un *bilanciere*, e l'altro una trave, entrambi di ferro fuso.

Ma non è difficile il persuadersi, che allora veramente si è fuori dei casi contemplati innanzi; e che quelli col profilo competenti ai pezzi di ugual resistenza, secondo la espo-

sta teoria, più non il sono; e che dovrebbero diversamente determinare le dimensioni e le forme.

Ciò non ostante i pratici, di tali pezzi assumono le sezioni ed i profili così, come se quei vuoti non esistessero. E da questo poco che abbiám detto, si vede quanto si allontanano da ciò che la teoria richiederebbe.

214. Dopo il fin qui detto siamo al caso di determinare i momenti di elasticità e di resistenza pei pezzi di ogni una delle sezioni contemplate innanzi; ed anche, colla scorta medesima, per quelli di ogni altra sezione. Ma non ancora di trovarne in numeri i valori, perciocchè, per calcolarli, è necessario conoscere in numeri la E ed anche la R' , che dipendono dalla natura della materia di che è composto il pezzo, e che, come costanti, entrano nella composizione (123, 155) della ϵ e della ρ .

Or vediamo, come possa procedersi alla ricerca dei valori di E e di R' , e con quali riguardi.

215. In quanto alla E ricordiamoci queste due verità dimostrate innanzi; cioè

1.° che in vece dei moduli di elasticità assoluti positivo e negativo E_1 ed E_2 può prendersene un solo, facendo che sia $E = E_1 = E_2$, quando l'asse neutrale *passa pel centro di gravità della sezione*, ed *ivi si resta*, mentre il pezzo si va più scostando dalla positura retta (118).

2.° che abbiamo indizio certo che l'asse neutrale *non si sposta* dalla posizione attuale, quando incastrato il pezzo da un estremo, o meglio posato su due appoggi orizzontali e caricato successivamente di pesi sempre crescenti che ne pendano rispettivamente o dall'altro estremo, o dal mezzo; e grandi rispetto al peso del pezzo (cosicchè questo possa aversi, come trascurabile rispetto a quello) la freccia o ventre di sua curvatura vada crescendo proporzionalmente ad essi pesi aggravanti (124, 134).

Dovremo dunque prima accertarci che l'asse neutrale passa pel centro di gravità della sezione, quando il pezzo poco si

allontana dalla sua positura retta; o che tanto poco se ne scosti da potersi avere pur passare per esso: e dopo fatti certi di tanto, posto come innanzi (XIV)

$$e = E(2\int_0^x Zz^2 + 2\int_0^{\beta} Zz^2),$$

e calcolatala per un pezzo prismatico di data sezione posato su due appoggi orizzontali, vedere col fatto, per quale discesa del punto medio aggravato da pesi successivamente crescenti, la freccia si mantiene *veramente proporzionale* al peso aggravante, o *quasi ad esso proporzionale*; e quindi per esse frecce o discese calcolare la *E*.

216. Li sperimentatori hanno scelto, per sperimentare queste cose, pezzi di sezione rettangola, sì per migliore comodità; e sì per più grande speditezza di calcoli. Ed ecco in qual modo han cercato accertarsi se, nello spostarsi poco il pezzo dalla positura orizzontale, l'asse neutrale passa o *può aversi* passare pel centro di gravità della sua sezione.

Supponiamo (*fig. 53*) essere *CDEG* la sezione longitudinale di un pezzo a sezioni trasversali rettangole. Consideratone la sezione *MN*, l'asse neutrale ne sarà proiettato nel suo punto di mezzo *O*; e le fibre, da *O* ad *M* si premeranno, da *O* ad *N* si stenderanno: però, ove davvero l'asse neutrale sia proiettato nel mezzo *O* della *NM*, se il pezzo si segasse, per traverso da *M* ad *O* non dovrebbe scemarne la resistenza alla flessione; perciocchè non per questo le sue fibre recise sarebbero suscettive di più facile accorciamento. Non così se si recidesse alcuna delle fibre da *O* ad *N*; perciocchè allora mancherebbe la resistenza all'allungarsi di queste fibre, che anzi se ne allontanerebbero le parti, ed il pezzo dovrebbe diventare meno resistente.

Posato dunque un pezzo su due appoggi orizzontali *Q, R*, carichiamolo di un peso *P*; e misuriamone la freccia di curvatura *HM*. Quindi recidiamone parte delle fibre a cominciare da *M* e posatolo sulli stessi appoggi, e caricatolo dello stesso peso *P*, rimisuriamone la freccia *HM*.

Se questa freccia la troveremo quanto prima, concluderemo che il pezzo oppone ancora la medesima resistenza. Se la troveremo maggiore concluderemo che la resistenza

è minore; e che quindi alcuna delle fibre tese, cioè *sotto-poste all'asse neutrale* è stata recisa.

Dunque, diremo in questo caso, *l'asse neutrale si trova più in su del luogo fin dove abbiamo recise le fibre a cominciare da sopra.*

Questa maniera di sperimentare fu messa in campo da Duhamel, che l'adottò pei legnami: e vide ancora, a conferma del precedente ragionamento, che introducendo nel tratto reciso una tacca di legno assai duro, la resistenza del pezzo cresce alcun poco quando essa scende sino al terzo dell'altezza della sua sezione; che si mantiene quasi la stessa fin tanto che non penetra sino alla metà, e poi sminuisce. E su queste norme, diversi hanno materiali diversi sperimentati: e più l'abete ed il ferro.

E dalli esperimenti fatti può inferirsene, che quando un pezzo prismatico a sezioni rettangole, *poco si scosta dalla sua positura retta* cioè che *quando piccolissima n'è la flessione*, l'asse neutrale passa pel centro di gravità della sezione, o di poco se ne scosta; così che resta per li materiali sperimentati, giustificata la ipotesi di $E_1 = E_2 = E$: e che riterremo tutt'ora come pura ipotesi per li altri materiali.

Il Professore Barlow volle anche sperimentare direttamente, ove sarebbe andato a porsi l'asse neutrale in un pezzo di sezione rettangola, quando si fosse piegato tanto, da potersi rompere, ove per poco si fosse piegato di più. E trovò che nell'abete l'asse neutrale si scosta dalla faccia concava del pezzo pei $\frac{2}{3}$ della sua altezza, e nel ferro forgiato vi si accosta per l' $\frac{2}{3}$ dell'altezza medesima.

Quindi resta indubitato pei materiali sperimentati; che per pezzi che poco si scostano dalla positura retta, l'asse neutrale *passa quasi pel centro di gravità della sezione*; e che nell'abete e nel ferro forgiato *certo notevolmente se ne scosta quando i pezzi si piegano tanto che sono quasi per rompersi*: onde l'asse neutrale cangia assai di sito.

217. Intanto l'asse neutrale, nella flessione dell'abete prossima alla rottura, stando tra il centro di gravità della sezione e la faccia convessa, debb'essere (118, 2.^a) allora $E_1 > E_2$; e nel ferro malleabile, nello stesso caso di flessio-

ne, stando tra il centro di gravità e la faccia concava (118,3.°) debb' essere $E_1 < E_2$. Onde si vede che in tali curvature non regge più punto la ipotesi di $E_1 = E_2 = E$; e che pertanto il modulo di elasticità va variando dalla flessione minima alla più grande flessione del pezzo. Onde ne segue questa importantissima conclusione (che coincide con ciò che dicemmo innanzi (124)): cioè, che veramente, tutte le formole od equazioni trovate nei due articoli precedenti, e le conseguenze dedottene, *non possono essere fiduciali che tra certi brevi limiti soltanto*: a cominciare da uno spostamento minimo dalla positura retta, e fintantochè l'asse neutrale o *non cangia posizione*, o la *cangia* allontanandosi per una *quantità minima* dalla posizione primiera; perciocchè sappiamo, pella prima enunciata verità (215), che allora soltanto la E , e quindi anche le E_1 ed E_2 possono ritenersi, come costanti. Ed è la seconda ricordata verità (215), che ci apre la via a fissare questi limiti, facendo le cose detto in secondo luogo nel numero antiprecedente.

218. Abbiamo una bella serie di sperimenti istituiti dal signore Giorgio Buchanan su pezzi di abete, di sezioni quadrate, ed anche rettangole, messi tanto in costa che in piatto; e nei quali la più grande dimensione di quelli di più grande sezione era la quindicesima parte della distanza degli appoggi, che era di cinque piedi inglesi: ed egli non solo ne misurava il ventre per ogni peso aggravante che ne pendeva dal mezzo, e che variava dalle centosettanta alle millecentonovanta libbre e che perciò erano assai grandi rispetto a' pesi dei pezzi, e questi trascurabili rispetto a quelli; ma osservava ancora, con molta accuratezza, fino a quando la elasticità del pezzo era conservata, quando si alterava (109), e quando ciascun pezzo rompevasi. E simili accurati sperimenti faceva su pezzi di ferro fuso, osservando le medesime cose.

Posteriormente analoghi sperimenti, e notando le medesime cose, faceva il Professore Barlow, su pezzi di ferro malleabile di sezioni rettangole, alte tre pollici o poco meno, e larghe della metà o poco più; e posati su sostegni lontani per undici volte l'altezza della sezione; e caricandoli

nel mezzo da centoventicinque millesimi di tonnellata sino a sette tonnellate e mezza.

219. Bene esaminando la tavola che riporta li esperimenti del signor Buchanan sull'abete; e facendovi su i necessari calcoli se ne deducono le seguenti conseguenze.

1.^o Finchè la elasticità è conservata il ventre cresce *proporzionalmente* al peso aggravante; od in proporzione *poco minore*.

2.^o Quando la elasticità comincia ad alterarsi il ventre cresce in *proporzione maggiore* del peso aggravante.

3.^o La elasticità non è alterata, quando la freccia è $\frac{1}{16}$ della distanza delli appoggi; ed il peso aggravante $\frac{1}{16}$ circa del peso che rompe, ossia alquanto meno del terzo.

4.^o La elasticità comincia lentamente ad alterarsi oltrepassato il precedente limite del ventre $\frac{1}{16}$ della distanza delli appoggi; si altera notevolmente quando cresce ad $\frac{1}{8}$ di essa distanza, e quando oltrepassato questo limite è per avvicinarsi ad $\frac{1}{4}$ il pezzo si rompe.

Dunque conchiuderemo, che l'asse neutrale non cangia di posizione nell'abete, ammeno sensibilmente, e che però può aversi $E_1 = E_2 = E$, ed il modulo di elasticità E costante, fintantochè il ventre di un pezzo posato su due appoggi è minore della sessantesima parte della distanza delli appoggi ed il peso che il piega è minore dell'un terzo di quello che il rompe: e fino a tanto che la elasticità del pezzo è conservata. E per induzione può ritenersi (finchè altri simili minuti esperimenti non vengano ad illuminarci) che lo stesso succeda nelli altri legnami, ma prendendo una frazione tanto più inferiore alla sessantesima parte della distanza delli appoggi pel ventre di curvatura; ed il peso tanto minore dell'un terzo di quello che il rompe; per quanto più la elasticità di ciascuno individuato legname è inferiore a quella dell'abete.

220. Parimenti esaminando l'altra tavola del signor Buchanan relativa alli esperimenti sul ferro fuso, si rende manifesto, che

1.^o la elasticità non è alterata finchè il ventre è $\frac{1}{16}$ della distanza delli appoggi; ed il peso aggravante è prossimamen-

te i $\frac{1+3}{1+2}$ del peso che rompe, ossia *poco più dei tre settimi*:

2.° la elasticità è alterata, quando il ventre arriva ad $\frac{1}{16}$ di essa distanza:

3.° finchè la elasticità è conservata la freccia cresce proporzionalmente al peso: e così cresce anche quando comincia ad alterarsi: e quindi alquanto meno rapidamente del peso aggravante.

Dunque conchiuderemo, che l'asse neutrale non cambia di posizione nel ferro fuso, e quindi $E_1 = E_2 = E$, ed il modulo di elasticità E costante, fintantochè il ventre di un pezzo posato su due appoggi *non oltrepassa la centotrentottesima parte della distanza delli appoggi*, ed il peso che il piega *non oltrepassa i tre settimi* di quello che il rompe: e fino a tanto che la elasticità del pezzo è conservata. E lo stesso può ritenersi che avvenga pelli altri metalli fusi; ma prendendo una frazione tanto più inferiore all' $\frac{1}{16}$ della distanza delli appoggi, per quanto più la elasticità di ciascun metallo è inferiore a quella del ferro.

221. Il Professore Barlow fece li suoi sperimenti a fine di determinare la posizione dell'asse neutrale, e la più grande flessione alla quale potrebbero soggiacere le rotaie di strade ferrate, senza che perciò ne soffrissero permanente alterazione, ovvero perdita di elasticità: e ne registrò i dati ed i risultamenti in un quadro.

Or ecco le conseguenze importanti che ne provengono, fatto sui numeri che presenta li opportuni calcoli.

1.° Il ventre di curvatura, *al primo spostarsi* del pezzo dalla positura retta, va crescendo assai meno rapidamente, che richiederebbe la sua proporzionalità al peso aggravante; ma arrivato all' $\frac{1}{16}$ della distanza delli appoggi, va crescendo più rapidamente; e fintantochè *non arriva ad essere l' $\frac{1}{16}$ di essa stessa distanza, cresce quasi come il peso aggravante; onde può aversi come ad esso proporzionale.*

2.° La elasticità del pezzo resta compiutamente conservata, fintantochè non prende un ventre di curvatura uguale all' $\frac{1}{16}$ della distanza delli appoggi. Arrivato ad essere $\frac{1}{16}$ di essa distanza, la elasticità si altera; e sempre più a misura ch'esso cresce ulteriormente.

3.° Quando il ventre di curvatura è di $\frac{1}{177}$ della distanza delli appoggi l'asse neutrale si trova stare distante dalla sommità del pezzo pelli $\frac{1}{17}$ della sua altezza; ed il pezzo trovasi avere perduta tutta la sua elasticità, quando la freccia arriva alli $\frac{1}{17}$ della distanza delli appoggi, ed il peso aggravante è i $\frac{1}{3}$ di quello che fa alterarne la elasticità.

Dunque conchiuderemo: nel ferro malleabile, l'asse neutrale può aversi conservare una posizione fissa mentre il ventre di curvatura che prende un pezzo posato su due appoggi orizzontali, *prossimamente si conserva tra il quattrocentesimo e il trecentesimo della distanza delli appoggi*: oltre un tal limite si smuove e *s'accosta alla faccia concava: nei primi istanti dello spostarsi dalla positura retta l'asse neutrale cangia rapidamente sito*, finchè non prende quello che conserva per un certo tempo: il peso che comincia ad alterare la elasticità è circa li $\frac{1}{3}$ di quello che la fa perdere del tutto; e che forse crescendo di poco il farebbe rompere.

Onde, assumendo per induzione che ciò avviene pel ferro malleabile avviene ancora pelli altri metalli malleabili, possiamo ritenere che $E_1 = E_2 = E$, e la E costante quando, prescindendo dal *primitivo spostarsi del pezzo dalla positura retta*, incurvatosi tanto che la sua freccia di curvatura è l' $\frac{1}{177}$ della distanza degli appoggi, *non s'incurva oltre dell' $\frac{1}{177}$ della distanza stessa*.

222. Stabiliti per questi tre principii sperimentali i limiti entro i quali le nostre formole sono fiduciali, e tra i quali può aversi la $E_1 = E_2 = E$; e la E costante, sarà facile determinare dalle osservazioni i valori della E per le varie sostanze; ed ecco in qual modo.

Quando un pezzo a sezioni identiche rettangole è posato su due appoggi orizzontali; ed è caricato di un peso nel suo mezzo, tale che il peso proprio del pezzo può aversi, come trascurabile rispetto al peso aggravante; il ventre di curvatura che prende (come fu trovato al n.° 188) è

$$(I.XXIV) \quad h = \frac{P}{4E} \cdot \frac{c^3}{a^3b}.$$

Or supponiamo che qui sia tutto noto, meno che la E .

Risolvendo la equazione rispetto ad E , avremo

$$(LXXV) \quad E = \frac{Pc^3}{4a^3bh};$$

e così riconosceremo la E .

Vogliasi, a cagion di esempio, determinare il valore di E per una data sostanza; per es. per l'abete. Si farà un parallelepipedo di abete; se ne misureranno le due dimensioni della sua sezione trasversale, si poserà su due appoggi orizzontali e si misurerà la distanza di questi; si caricherà, di un peso nel mezzo, e si misurerà con esattezza il ventre che prende. Tolto via il peso, si vedrà

1.° se il parallelepipedo *ritorna nella positura retta*, nel qual caso la elasticità è conservata (109):

2.° se il rapporto tra il ventre e la distanza delli appoggi è *al di sotto di un sessantesimo*:

3.° se, accresciuto tanto il peso aggravante, che il parallelepipedo è prossimo a rompersi, il peso *ch'è per rompere è più che tre volte quello*, che aveva fatto prendere al pezzo il misurato ventre.

Se *tutto questo sarà verificato*, si porranno le misurate cose e la misura del peso aggravante nella precedente formola; e calcolatala si troverà E , che sarà espressa in rotoli se P è dato in rotoli: e s'intende perchè le sostituzioni *non dovrebbero essere fatte*, se le sopradette tre cose non hanno luogo: ed anche perchè, tanto meglio sarà determinata la E *per quanto più sarà piccolo* il ventre di curvatura (dopo il primissimo spostarsi del pezzo dalla sua positura retta) (**).

Per maggiore commodità del misurare ed anche del cal-

(**) Nelli esperimenti in grande che faceva il Professore Barlow per commissione ricevutane dall'Ammiragliato di Londra, nell'arsenale di Woolwich, calcolava la E quando il pezzo prendeva tale freccia di curvatura, che oltrepassatala avrebbe perduta la sua elasticità. Comunque tali esperimenti fossero pregevolissimi, e per la grande esattezza, e per le grandi dimensioni dei pezzi, e comunque i materiali sperimentati fossero stati legnami, pure, dopo il detto di sopra, si vede che meglio sarebbe stato non aspettare che la freccia di curvatura, fosse proprio stata l'ultima tra quelle pelle quali la elasticità era conservata.

colare sarebbe utile misurare la distanza c delli appoggi in palmi , e l'altezza a e la larghezza b del pezzo in onces (la decima parte del palmo). Allora bisognerà prendere per E la millesima parte del valore ottenuto precedentemente. Perciocchè

$$(LXXVI) \quad \frac{E}{1000} = \frac{(P \frac{c}{10})^3}{a^3 b h}$$

e $\frac{c}{10}$, è appunto il numero dei palmi contenuti in c onces.

E se la distanza delli appoggi fosse tanto grande che un peso mediocre rispetto al peso del pezzo , vi producesse una sensibile freccia , cosicchè il peso del pezzo non potesse aversi , come trascurabile rispetto a quello aggravante , si farà uso dell'altra formola

$$(LXXVII) \quad E = \frac{(5 \pi c + 8 P) c^5}{32 a^3 b h}.$$

223. Il metodo precedente stimiamo che sia il migliore da tenere per fare i dovuti esperimenti. E pure non sempre è stato così fatto da accurati sperimentatori ; onde i valori di E riportati da molti autori , non sono rigorosissimi : ma pure è forza stare ai dedotti dai fatti sperimenti. E noi abbiamo notati nella tavola seguente li moduli di elasticità fin qui più generalmente ricevuti. E dopo il fin qui detto si vede , il perchè essi possano tenersi ancora pelli moduli di elasticità assoluti : e quando. Onde dicevamo (37,90) potersi questi trovare ancora per via indiretta : la quale è appunto quella or ora indicata.

Pertanto (17, 74, 123) si vede che qui il *modulo di elasticità* E è *quel peso ideale* che se agisse in modo assoluto sur un fascio di fibre del pezzo , le quali passano per una oncia quadrata della sua sezione , sarebbe capace di allungarle od accorciarle di pari misura secondo che stanno verso la faccia convessa o concava , e di tanto per quanto è la loro attuale lunghezza ; ma *nella ipotesi* che quelle fibre si allungassero od accorciassero *sempre proporzionalmente allo sforzo* che soffrono pel piegarsi del pezzo , e che l'asse neutrale si *tenesse sempre* nella stessa posizione.

224. Seguono i valori del modulo di elasticità E , dati in rotoli per ogni oncia quadrata.

NUMERO progressivo dal MATERIALE più rigido al meno rigido.	NOME DEI MATERIALI (per ordine alfabetico).	MODULO di elasticità in rotoli E.	Osservazioni
<i>Legnami.</i>			
21	Abete bianco di America (<i>Spruce</i>)	681 700	Questi numeri si prenderanno quali sono, se tutte le dimensioni dei pezzi si prendono in once. Se se staccheranno le ultime tre cifre a destra, se le dimensioni per traverso si prendono in once, e le lunghezze in palmi, lo che torrà più comodo nel misurare, ed anche più comodo nel calcolare.
5	Abete bianco di Cristiania (<i>Deal</i>).	988 600	
4	Abete detto <i>Memel</i> .	1072 810	
26	Abete della foresta di <i>Mar</i>	463 100	
9	Abete di riga.	924 700	
23	Abete di Scozia	521 500	
9	Acacia	924 700	
22	Castagno	627 800	
18	Faggio	721 200	
13	Frassino.	836 000	
12	Mogano delle Honduras (<i>Mahogany</i>)	873 000	
19	Mogano di Spagna	688 000	
14	Noce.	781 700	
17	Olmo.	735 900	
23	Ontano.	593 500	
28	Pino Cedro del Libano.	266 300	
10	Pino giallo (<i>Weymouth</i>).	893 100	
15	Pino Larice	747 200	
20	Pino Piceo.	686 200	
27	Pioppo.	418 100	
16	Platano.	736 100	
8	Poona	926 000	
6	Querce Africana (<i>Quercus</i>)	916 900	
3	Querce di America	1073 390	
7	Querce comune	939 500	
2	Querce di Danzica	1091 900	
11	Querce di Riga	882 500	
24	Sicomoro	567 700	
1	Teak.	1187 500	
<i>Metalli.</i>			
1	Acciajo.	13 852 000	
3	Ghisa, ovvero ferro fuso.	10 083 200	
2	Ferro di fucina, ossia malleabile.	13 656 100	
8	Piombo.	394 500	
6	Rame	4 893 600	
7	Stagno	2 525 100	
4	Zinco	7 496 600	
5	Metallo da Cannone.	5 410 400	

225. E prima di andare oltre ci piace riportare qui, anche ritenendo le misure e pesi francesi, i valori di E dati dal Poncelet nella sua *Meccanica industriale*; e li quali combinano pure con quelli del Navier: e per miglior comodo dei pratici vi abbiamo aggiunti li equivalenti in misure e pesi napolitani. Nei francesi sono assunti per unità il metro ed il kilogrammo; nei napolitani l'oncia ed il rotolo.

NOME DEI MATERIALI.	MODULO di elasticità, in Kilogrammi per metro quadrato E .	MODULO di elasticità, in rotoli per oncia quadrata E .	Osservazioni
<i>Legnami.</i>			Prendendo, nelle misure napolitane, per unità delle dimensioni trasversali l'oncia, o per unità delle longitudinali il palmo, <i>le che torna a più comodo della pratica, si avranno, come non scritte le ultime tre cifre a destra dei numeri nella terza colonna.</i>
Querce forte.	1 688 000 000	1 325 900	
Querce di qualità media.	1 223 250 000	900 800	
Querce debole.	683 000 000	336 400	
Abete forte.	1 293 000 000	1 015 600	
Abete di qualità media.	953 620 000	749 000	
Abete debole.	538 000 000	438 300	
<i>Metalli.</i>			
Ferro forgiato, il migliore, e sottile	25 000 000 000	19 637 200	
Ferro forgiato debole, o grosso	15 000 000 000	11 782 300	
Ferro fuso grigio.	9 029 000 000	7 092 200	
Ferro fuso dolce.	10 653 000 000	8 367 800	

226. Veduto con qual metodo convenga determinare la E , e datine i valori; vediamo come si è fatto per determinare quelli della R' : e rendiamocene ragione.

227. Ricordiamoci che R' esprime il più grande sforzo al quale vanno soggette le fibre di un pezzo di cui si mette a cimento la resistenza rispettiva, quando è incurvato da forze estrinseche che vi agiscono su (154); e che un tale sforzo vien dato (158, 1°), uguagliando il momento di resistenza al più gran valore che pel variare di x è capace di prendere il secondo membro della (XLIX); cosicchè, (165) quando un pezzo veramente prismatico posato su due appoggi è aggravato di un sol peso che ne pende dal mezzo, ed

il suo proprio peso è trascurabile rispetto a questo, si ha

$$(LXXVIII) \quad \frac{R'M}{s} = \frac{P_c}{4},$$

essendo P il peso aggravante.

E da ciò che abbiamo detto (154), se fosse tale il peso aggravante che stasse sul punto di rompere il pezzo, dovrebbe essere, dicendo P_1 un tal peso,

$$(LXXIX) \quad \frac{RM}{s} = \frac{P_1 c}{4}.$$

Ma la quale formola (154) *non è fiduciale*, perciocchè allora gli allungamenti delle fibre non sarebbero più proporzionali alle resistenze che si sviluppano; ed anche più, perchè l'asse neutrale dal minimo spostarsi del pezzo dalla positura retta fino all'incurvarsi tanto ch'è prossimo a rompersi, va cangiando di posizione; mentre che d'altronde quelle formole valgono in vero quando questo asse ha posizione quasi fissa. E di queste cose pria dette in generale (153, 154), or ora (215 e seguenti) ne abbiain veduto la conferma.

Ma comunque *ciò sia il vero, pure supponiamo per un momento*, che alla formola

$$\frac{RM}{s} = \frac{P_1 c}{4},$$

che corrisponderebbe alla rottura, pur potesse aversi piena fiducia: lo che vuol dire che l'asse neutrale serbasse sempre la medesima posizione.

Ove così fosse, sarebbe

$$R' : R :: P : P_1.$$

Dunque se conoscessimo la R che corrisponde al peso P_1 che rompe, prendendo per R' una frazione di R , per esempio la *nesima* parte, avremmo in essa il più grande sforzo che soffrirebbero le fibre di un pezzo, che sono le più tese o compresse, quando in vece che essere caricato dal peso che rompe, fosse caricato dall'altro P che è la *nesima* parte di quello che rompe. E però, se noi volessimo che fosse tale lo sforzo delle fibre di un pezzo di cui si mette a cimento la resistenza rispettiva, che la *elasticità del pezzo non fosse punto alterata*, dovremmo porre per R' quella frazione

Teor. delle Res.

di R , che è il peso aggravante P di P_1 , il quale peso P non fa punto alterare la elasticità del pezzo. Onde, determinato per la

$$\frac{RM}{a} = \frac{P_1 c}{4}$$

il valore di R corrispondente al peso P_1 che rompe *nella ipotesi che questa equazione reggesse pel caso della rottura*, dovremmo prendere (219) per l'abete R' non maggiore del $\frac{2}{3}$ di R ; pel ferro fuso R' non maggiore (220) delli $\frac{2}{3}$ di R ; e del ferro malleabile R' non maggiore (221) delli $\frac{2}{3}$ di R : avendo dimostrato l'esperienza che l'abete, il ferro fuso, ed il ferro malleabile, non perdono punto di loro elasticità fin tanto che il peso aggravante arriva ad essere rispettivamente li $\frac{4}{5}$, li $\frac{2}{3}$, e li $\frac{2}{3}$ del peso che rompe.

228. Intanto, comunque la equazione,

$$\frac{RM}{a} = \frac{P_1 c}{4},$$

per le ragioni ripetute di sopra, non regge pel caso della rottura, pur v'è da credere che fattone uso per la determinazione dei valori della R , dà per questa valori più piccoli dei veri; onde prese per R' i limiti massimi di dette frazioni di R avremo valori per P inferiori a quelli che sono i limiti veri dei pesi, che oltrepassati farebbero perdere la elasticità del pezzo. Di fatto, nell'avvicinarsi alla rottura (18), li allungamenti delle fibre, essendo più rapidi che non sarebbero se fossero proporzionali alle forze traenti, il peso vero che rompe esser deve più piccolo di quello che si calcolerebbe per le formole stabilite; onde messo per P_1 un tal valore, nella formola precedente, ne avremo in vero per R uno minore di quello che gli competerebbe, stando alla teoria: e quindi anche per R' uno inferiore a quello corrispondente al limite, che oltrepassato fa perdere la elasticità. Pur non di meno a soprabbondare in cautela si prenderanno per R' frazioni della R più piccole di essi limiti.

E poichè non tutta la materia di che si fa uso, comunque della stessa natura, è parimente dappertutto perfettamente omogenea e della stessa qualità; ed anche a tutte le cose

pari può alterarsi e *sposcarsi nelle sue forze intrinseche che sviluppa*, anche pel lungo soggiacere alli medesimi sforzi continuati, ed alle intemperie atmosferiche, riterremo le dette frazioni della R per R' come limite massimo dei valori di questa; e ci terremo in vece per R' a frazioni della R , più piccole delle precedenti. E la esperienza e la osservazione han dimostrato quali potrebbero essere li più convenevoli limiti inferiori.

Può quindi ritenersi che debba farsi

pei leguami R' tra $\frac{1}{4}$ ed $\frac{1}{10}$ di R

pei metalli fusi R' tra $\frac{1}{4}$ ed $\frac{1}{10}$ di R

pei metalli malleabili R' tra $\frac{1}{5}$ ed $\frac{1}{4}$ di R

limiti assunti, tra quelli generalmente ricevuti dai migliori autori inglesi, francesi ed italiani.

E ci avvicineremo più al limite *minimo* che non al *massimo*, secondo che vogliasi *maggiore o minor sicurezza*, secondo che la materia di che è composto il pezzo sia di *peggiore o migliore qualità e meno o più omogenea*; ed anche secondo che il pezzo debbe per un tempo più o meno *lungamente continuato* soggiacere all'azione delle individuate forze che ne mettono a cimento la resistenza rispettiva: e nulladimeno per pezzi *da impiegarsi per opere architettoniche monumentali* sarà meglio tenersi anche al di sotto del detto limite minimo.

229. E dal fin qui detto si vede che la R che è detta *Modulo di resistenza rispettiva* (e ch'è determinata per la LXXIX) è in vero *quel peso ideale che misura sull'unità superficiale* (un'oncia quadrata), *lo sforzo che soffrirebbero le fibre le più tese o le più compresse* di un pezzo diritto di cui si mette a cimento la resistenza rispettiva, se da quando s'incurva pochissimo, fino a quando s'incurva tanto che è in sul punto di rompersi, sviluppassero sempre resistenze *proporzionali agli allungamenti ed agli accorciamenti*, ed uguali fra loro, per modo che l'asse neutrale vi fosse sempre di *posizione fissa*, e passando sempre pel centro di gravità della sezione: le quali cose non sono veramente.

230. Nelle formole (LXXVIII) e (LXXIX) ed anche in tutte le precedenti, tutte le misure sono riferite alla unità medesima, rispetto alla quale s'intende calcolato il modulo R e la sua frazione R' , che secondo il supposto pei loro valori (corrispondenti al peso per once quadrate) sono once. Talora in pratica torna comodo prendere per unità delle dimensioni trasversali l'oncia e per unità delle lunghezze il palmo. Ma la c essendo once, otterremo i palmi dividendola per 10; e le formole citate danno

$$\frac{R'M}{10 \cdot a} = \frac{P'_{10}}{4}, \quad \frac{RM}{10 \cdot a} = \frac{P_{10}}{4}.$$

Dunque, ove in tutte le formole riportate innanzi le lunghezze c vogliamo valutarci in palmi, e le dimensioni per traverso in once, dovranno per R ed R' prendersi pesi dieci volte più piccoli di quelli che debbono prendersi, quando le unità sono tutte date in once.

231. I valori del Modulo R di resistenza alla rottura sono dati nella tavola seguente, ove sono espressi in rotoli per ogni oncia quadrata (la centesima parte di un palmo quadrato) della sezione. E vi sono anche notati i limiti minimo e massimo delle frazioni di esso che possono prendersi per valore di R' ; ed anche il medio tra essi limiti.

NUMERO progressivo dal MATERIALE più resistente al meno resistente.	NOME DEI MATERIALI (per ordine alfabetico)	MODULO di resistenza rispettiva alla rottura in rot. — R .	LIMITI dei valori di R' .		MEDIO tra i limiti.	Osservazioni.
			minimo.	massimo.		
<i>Legnami.</i>						
19	Abete bianco comune (più resistente) . .	5600	560	936	748	I numeri delle colonne precedenti si prendevano quelli once, se tutte le dimensioni dei pezzi si prendono in once. Se ne staccherà l'ultima cifra a destra, se le dimensioni per traverso si prendono in once e le lunghezze in palmi, lo che torna più comodo nel misurare ed anche più comodo nel calcolare.
40	Abete bianco comune (meno resistente) . .	4000	400	666	533	
18	Abete bianco d'America	5660	566	943	750	
4	Abete bianco di Cristiania	6800	680	1166	923	
35	Abete bianco d'Inghilterra.	4600	460	766	613	
23	Abete rosso	3400	340	900	720	

NUMERO progressivo dal MATRIMONIAL più recente al meno recente.	NOME DEI MATERIALI (per ordine alfabetico).	MODULO di resistenza rispetto alla rottura in rot. — R	LIMITI dei valori di R'.		MEDIO tra i limiti.	Osservazioni.
			minimo.	massimo.		
<i>Legnami.</i>						
43	Abete di riga.	3600	360	600	480	I numeri delle colonne precedenti si prenderanno quali sono, se tutte le dimensioni dei pezzi si prendono in once. Se ne staccherà l'ultima cifra a destra, se le dimensioni per traverso si prendono in once e le lunghezze in palmi, lo che torna più comodo nel misurare ed anche più comodo nel calcolare.
44	Abete della foresta Mar	3400	340	566	453	
13	Abete di Scozia (più resistente)	5780	578	963	770	
41	Abete di Scozia (meno resistente) . . .	3890	389	648	518	
2	Abete di Norvegia e Longsoud, che è tra tutti il più resistente.	7860	786	1310	1048	
11	Carpino comune. . . .	5990	599	998	798	
19	Castagno selvatico. . .	5600	560	933	746	
38	Cipresso tuja	4160	416	696	561	
4	Citiso maggiociondolo.	6800	680	1133	906	
30	Faggio comune	5000	509	845	678	
7	Frassino.	6660	666	1110	888	
22	Ippocastano (castagno indiano)	5480	548	913	730	
38	Mogano di Spagna. . .	4200	420	700	560	
9	Mogano delle Honduras	6300	630	1050	840	
13	Mandorlo pesco. . . .	5910	591	985	788	
12	Nocciolo selvatico. . .	5930	593	988	790	
27	Noce comune	5300	530	883	706	
31	Noce nero.	5080	508	846	677	
9	Olmo nostrale.	6300	630	1050	840	
43	Olmo d' Inghilterra . .	3300	330	550	440	
16	Pero melagnolo	5700	570	950	760	
29	Pero peruggine	5190	519	865	692	
39	Pino cedro del libano.	4090	409	681	545	
	Pino larice	3290	329	548	438	
33	Pino larice detto <i>Mélèse</i>	4900	490	816	653	
24	Pino piceo	5350	535	891	713	
37	Pino rosso	4400	440	733	586	
18	Pioppo bianco.	5660	566	943	754	
45	Pioppo piramidale. . .	3300	330	550	440	
32	Platano occidentale . .	8000	800	1333	1066	
36	Platano orientale . . .	4570	457	761	609	
8	Pruno ciliegio canino . .	6400	640	1066	853	
5	Pruno susino selvatico.	6700	670	1116	893	
6	Querce la più resistente.	6670	667	1111	889	
28	Querce di qualità media	5200	520	866	693	
42	Querce la meno resistente	3800	380	633	506	
10	Querce ischia	6040	604	1006	805	

NUMERO progressivo dei MATERIALI più resistente al meno malteriore.	NOME DEI MATERIALI (per ordine alfabetico).	MODULO di resistenza rispettiva alla rottura in rot. — R.	LIMITI dei valori di R.		MEDIO tra i limiti.	Osservazioni
			minimo.	massimo.		
<i>Legnami.</i>						
14	Querce del Canada, in migliore	5800	540	906	773	I numeri del- le colonne precedenti si prenderanno quali sono, se tutte le di- mensioni dei pezzi si pren- dono in once. Se ne stacche- rà l'ultima cifra a destra, se le dimon- sioni per tra- verso si pren- dono in once e le lunghe- ze in palmi, to che torna più comodo nel misurare ed anche più comodo nel calcolare.
34	Querce di Danzica . .	4780	478	796	637	
21	Querce Inglese (più re- sistente)	5490	549	915	782	
42	Querce Inglese (meno resistente)	3880	388	646	517	
23	Querce di riga	5400	540	900	720	
3	Robinia falsa gaggia .	7180	718	1060	889	
32	Salcio bianco	5000	500	833	666	
20	Silquastro comune . .	5500	550	916	733	
5	Sorbo ciavardello . . .	6700	670	1116	893	
17	Sorbo salvatico	5680	568	946	637	
26	Sicomoro	5310	531	885	708	
25	Tasso libo.	5320	532	886	709	
1	Teak	8090	809	1348	1078	
37	Tiglio nostrale	4400	440	733	586	
45	Tulipifero, legno giallo.	3300	330	550	440	
<i>Metalli.</i>						
1	Ferro malleabile di pic- cola sezione, e di mi- gliore qualità (a) . .	57700	14425	19233	16829	
2	Ferro malleabile di più grande sezione, e di buona qualità (a) . .	33300	8325	11100	9712	
6	Ferro malleabile ingle- se (b)	20200	5050	6733	5891	
3	Ferro fuso (ghisa dolce) di migliore qualità . .	30000	3000	7500	5250	
4	Ferro fuso (ghisa dolce) di qualità media (b). .	25000	2500	6250	4375	
5	Ferro fuso (ghisa dolce) di qualità inferiore (a)	23000	2300	5750	4025	
7	Ghisa grigia di qualità media	15800	1580	3950	2765	
8	Ghisa grigia di qualità inferiore (a).	14100	1410	3525	2467	

(a) Questo valore è generalmente adottato dai francesi.

(b) Questo valore è generalmente adottato dagli inglesi.

232. E prima di andare oltre, ci piace riportare qui, anche ritenendo le misure e pesi francesi, i valori di R' dati dal Poncelet nella sua *Meccanica Industriale*, che mentre combinano con quelli del Navier, sono dati in kilogrammi per ogni metro quadrato; e che ridotti in rotoli per ogni oncia quadrata, sono anche compresi nella tavola precedente.

NOME DEI MATERIALI.	VALORI di <i>R'</i> .	OSSERVAZIONI.
<i>Legnami.</i>		
Querce la più forte	850 100	Qui è dato un solo valore per <i>R'</i> ; mentre che, come è detto al n.º 228, possono, anzi debbono variare tra certi dati limiti.
Querce la più bebole	586 200	
Abete forte	709 700	
Abete dolce	511 100	
<i>Metalli.</i>		
Ferro forgiato, il migliore o di sottili dimensioni . . .	24 313 000	
Ferro forgiato debolo, di grosse dimensioni	13 710 000	
Ferro fuso grigio	4 493 000	
Ferro fuso dolce	7 353 000	

233. I valori di R' esprimono li sforzi, cui vanno soggette le fibre le più lontane dall'asse neutrale, quando il pezzo s'incurva tanto poco, da non perder punto di sua elasticità: nel qual caso può aversi $E_1 = E_2 = E$.

Ma allora l'asse neutrale passa pel centro di gravità della sezione; ed ha luogo (153) la equazione (XLV)

$$\frac{R_1}{\alpha} = \frac{R_2}{\beta}.$$

Dunque, in vero la tensione delle fibre le più lontane dall'asse neutrale verso la convessità, non sarà eguale alla compressione delle più lontane verso la concavità, che quando la sezione del pezzo ha un asse orizzontale di simmetria. Perciocchè allora può essere $\alpha = \beta$, senza di che non sarà $R_1 = R_2$.

E sembra che potrebbe conchiudersi le migliori sezioni da dare ai pezzi essere appunto quelle che hanno un asse di simmetria orizzontale; perciocchè allora soltanto oppongono uguale resistenza alle forze che flettono il pezzo, sì le fibre che stanno sulla faccia convessa, come quelle che stanno sulla concava.

Ma molti costruttori inglesi sono di opinione assai diversa, credendo in vece che anche nelle minime flessioni le quantità R_1 ed R_2 dovessero serbare presso a poco il rapporto medesimo, che il modulo di ultima coesione, serba al modulo di resistenza allo schiacciamento. Così nel ferro fuso il primo modulo (23) essendo presso a poco la metà del secondo (87) credono che così debba farsene la sezione, da essere anche R_1 la metà di R_2 .

Or noi abbiamo la equazione (XLIII) dalla quale si cava che

$$R_1 : R_2 :: \frac{\int_0^\beta Zz}{\beta} : \frac{\int_0^a Zz}{a};$$

dunque vorrebbero che la quantità $\frac{\int_0^\beta Zz}{\beta}$ fosse la metà del-

l'altra $\frac{\int_0^a Zz}{a}$; e la quale proporzionalità nel caso di due rettangoli darebbe luogo alla eguaglianza

$$\frac{2b_1a^2}{a} = \frac{b_2\beta^2}{\beta}, \text{ ossia } 2b_1 \cdot a = b_2 \cdot \beta.$$

Quindi danno la regola pratica, di doversi così fare la sezione di un pezzo prismatico di ferro fuso, da esserne l'aja rettangola verso la convessità, doppia di quella verso la concavità (204). E similmente ragionano per altri materiali.

A noi pare che questo ragionamento assai sottile, non possa veramente aver luogo che *pel caso prossimo alla rottura*; e non in tutto per quello di una flessione minima.

Pur nulladimeno, potendo avvenire che, comunque tutte le cose sieno così fatte, da dovere il pezzo mantenersi assai lontano dalla rottura, per alcuna accidentalità potesse

anche per istanti avvicinarvisi molto, abbiamo opinione potersi dare la regola, che *nei legnami, le sezioni trasversali dei pezzi si facciano alquanto più robuste verso quella faccia che dovrà essere soggetta a compressione; e che l'inverso si faccia per metalli.*

234. Determinati i valori di E , potremo, per le formole dell'articolo primo, determinare le frecce o ventri di curvatura dei pezzi contemplati innanzi; e quindi la quantità di azione della forza per piegare un pezzo di trasmissione, prima che la forza non sia realmente trasmessa. Una tale quantità di azione viene espressa in generale da

$$Fh;$$

e postovi per h i valori calcolati, come è detto, sarà trovata la detta quantità di azione che può dirsi perduta.

235. Parimenti determinati i valori del fattore M , come è detto innanzi; ed anche quelli di R' , si calcolerà il momento di resistenza rispettiva; e quindi per le formole dell'articolo secondo si potranno, o determinare le dimensioni dei pezzi date le forze, onde essi non abbiano a soffrire oltre un certo dato sforzo, o date le dimensioni del pezzo, le forze che potranno agirvi su, perchè non abbia fibre compresse o premute oltre una certa misura.

ARTICOLO IV.

Si riepilogano le cose esposte e si applicano a degli esempi.

236. Dalle cose esposte nei tre articoli precedenti si desumono le seguenti *Definizioni, e Principii fondamentali relativi alla resistenza rispettiva.*

Definizioni.

1. *Resistenza Rispettiva* di un pezzo rettilineo, è quella che il pezzo oppone ad una o più forze agenti sur esso con direzioni perpendicolari al suo asse e che l'incontrano. Quando così agiscono le forze sul pezzo, dicesi *mettersene a cimento la resistenza rispettiva*.

2. *Resistenza alla flessione* di un pezzo rettilineo, è quella opposta dal pezzo alle forze che mettendone a cimento la resistenza rispettiva, l'incurvano sì poco che non perde di sua elasticità. In questo caso, si dice del pezzo *mettersene a cimento la resistenza alla flessione*.

3. *Resistenza alla rottura* di un pezzo prismatico rettilineo, è quella opposta dal pezzo alle forze che mettendone a cimento la resistenza rispettiva, l'incurvano tanto, che è in sul punto di rompersi; e che si romperebbe di fatto se per poco s'incurvasse di più. In questo caso, si dice del pezzo *mettersene a cimento la resistenza alla rottura*.

4. *È conservata la elasticità rispettiva* di un pezzo, quando cessata l'azione delle forze che l'hanno incurvato, esso *ritorna* allo stato primiero.

5. *È alterata la elasticità rispettiva*, quando cessata l'azione delle forze che l'hanno incurvato, esso *non ritorna proprio* alla sua posizione primiera.

6. *È perduta la elasticità rispettiva* di un pezzo, quando cessata l'azione delle forze estrinseche che l'hanno incurvato, esso, quasi non si smuove dalla acquistata curvità.

7. *Superficie neutrale*, in un pezzo di cui si mette a cimento la resistenza alla flessione, è un cilindro ad elementi orizzontali, che limita, separandole, le fibre del pezzo che si allungano, e che stanno verso la convessità, da quelle che si accorciano, e che stanno verso la concavità.

8. *Asse neutrale*, od anche di *equilibrio*, in una sezione normale all'asse di un pezzo, è la retta del cilindro, superficie neutrale, la quale giace nella sezione stessa.

9. *Curva di flessione* in un pezzo, è la sezione normale

nella superficie neutrale, prodottavi dal piano che passa per l'asse del pezzo quando retto. Può aversi per la linea secondo la quale si curva quest'asse.

10. *Freccia o ventre di flessione* è la discesa dell'estremo libero di un pezzo incastrato orizzontalmente, quando si flette; od anche se il pezzo è posato su due appoggi od incastrato nei suoi estremi, la distanza del punto più basso della sua curva di flessione, dalla orizzontale che passa per quei suoi punti che stanno sugli appoggi, o negli incastri.

11. *Momento di elasticità* di un pezzo, è quel fattore della somma dei momenti delle forze intrinseche sviluppatesi pel suo incurvarsi, nelle fibre che passano per una sua individuata sezione per traverso, valutati rispetto all'asse neutrale, il quale fattore è indipendente dalla curva di flessione.

12. *Modulo di elasticità rispettiva*, è quel peso ideale, che se agisse in modo assoluto, sur un fascio di fibre del pezzo di cui si mette a cimento la resistenza rispettiva, le quali passano per un'oncia quadrata della sua sezione per traverso, sarebbe capace di allungarle od accorciarle di pari misura, e di tanto per quanto è la loro attuale lunghezza; ma nella ipotesi che si allungassero, ed accorciassero sempre *proporzionalmente* allo sforzo che soffrono per l'incurvarsi del pezzo.

13. *Momento di Resistenza rispettiva* di un pezzo, è la somma dei momenti delle forze intrinseche sviluppatesi pel suo flettersi nelle fibre che passano per quella sua sezione per traverso ove sono le più tese o compresse, calcolati rispetto all'asse neutrale che giace sur essa sezione, e quando il pezzo s'è incurvato tanto da fare soggiacere esse fibre ad un dato assunto sforzo, *frazione* del modulo di resistenza rispettiva. Quando l'assunto sforzo si fa uguale al modulo di resistenza rispettiva, il momento di resistenza rispettiva dicesi *momento di resistenza alla rottura*.

14. *Modulo di resistenza rispettiva* è quel peso ideale, che misura sull'unità superficiale lo sforzo che soffrirebbero le fibre, le più tese o le più compresse, di un pezzo diritto di cui si mette a cimento la resistenza rispettiva, se da quando

comincia ad incurvarsi, fino a quando s'incurva tanto che è sul punto di rompersi, sviluppassero sempre resistenze proporzionali agli allungamenti, agli accorciamenti e tra loro.

15. *Pezzi di ugual resistenza* sono quelli le di cui fibre più lontane dall'asse neutrale, in ogni sezione, sono tutte ugualmente tese o compresse: ossia resistono ugualmente alle forze estrinseche che piegano il pezzo.

Principii.

Si Noti che nelle formole od equazioni riportate appresso è

$x =$ l'ascissa
 $Z =$ l'ordinata
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{del perimetro della sezione del pezzo, ri-} \\ \text{ferito alla retta di simmetria della sezio-} \\ \text{ne, come asse delle ascisse, ed all'asse} \\ \text{neutrale, come asse delle ordinate:} \end{array} \right.$

$\alpha =$ la più grande ascissa del perimetro della sezione dalla parte onde il pezzo si fa convesso nell'incurvarsi:

$\beta =$ la più grande ascissa del perimetro della sezione, dalla parte onde il pezzo si fa concavo nell'incurvarsi:

$E_1 =$ Modulo di elasticità assoluta positiva:

$E_2 =$ Modulo di elasticità assoluta negativa:

$n =$ Rapporto del modulo di elasticità assoluta negativa al modulo di elasticità assoluta positiva (almeno che non si avverta diversamente):

$E =$ Modulo di elasticità rispettiva:

$x =$ l'ascissa
 $y =$ l'ordinata
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{della curva di flessione del pezzo, di cui} \\ \text{l'asse delle } y \text{ è parallelo alla direzione del-} \\ \text{le forze, e l'altro delle } x \text{ è l'asse stesso} \\ \text{del pezzo quando diritto, od anche una} \\ \text{retta ad esso parallela:} \end{array} \right.$

$\varphi =$ le forze agenti con continuità sul pezzo, valutate per ciascuna unità di lunghezza dell'asse del pezzo, ossia delle x :

$\gamma =$ l'ascissa del punto di applicazione di una individua forza φ :

$\Pi =$ il valore della forza φ , quando è costante: ovvero il peso di che è uniformemente caricato un pezzo, quan-

do giace orizzontale, valutato per ogni unità di lunghezza orizzontale:

P = valore di una forza isolata agente sul pezzo; ovvero peso isolato di che è caricato un pezzo, quando giace orizzontale:

c = distanza orizzontale di un estremo libero del pezzo dalla sezione ove è incastrato all' altro estremo; ovvero distanza orizzontale delli appoggi od incastri, quando il pezzo è appoggiato nei due estremi od incastrato: *si assume per la lunghezza del pezzo tra i medesimi termini, alla quale, la distanza c è di fatto nella pratica sensibilmente uguale:*

$h = \left\{ \begin{array}{l} \text{freccia o ventre} \\ \text{di curvatura,} \\ \text{quando il pezzo è} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{carico di pesi } \Pi \text{ uniformemente} \\ \text{distribuiti e di un peso addizionale } P: \\ \text{carico di un sol peso isolato } P: \\ \text{carico di soli pesi } \Pi \text{ uniformemente} \\ \text{distribuiti.} \end{array} \right.$

ϵ = Momento di elasticità rispettiva:

R = Modulo di resistenza rispettiva:

R' = Frazione del modulo R , che misura la tensione o pressione delle fibre del pezzo, le quali sono le più tese o le più compresse:

ρ = Momento di resistenza rispettiva:

M = Momento geometrico d'inerzia di una individuata sezione per traverso del pezzo:

a = altezza { dei pezzi a sezione rettangola; o del vuoto dei
 b = larghezza { pezzi a sezione tubulare rettangola:

A = altezza { dei pezzi a sezione tubulare rettangola:
 B = larghezza {

a_1 = altezza { dei rinflanchi dei pezzi a sezione rettan-
 b_1 = larghezza { gola:

d = diametro dei pezzi a sezione circolare; o del vuoto dei tubulari cilindrici:

D = diametro esterno dei pezzi tubulari cilindrici:

Le derivate di x , γ , y , sono espresse rispettivamente da x' , γ' , y' , y'' .

Principii generali in ordine alla flessione.

1. In ogni sezione per traverso di un pezzo, di cui è mess' a cimento la resistenza alla flessione, la posizione dell' *asse neutrale*, o di equilibrio è data dalla condizione, che i momenti delle due parti in che è divisa da esso, rispetto all' asse stesso, stanno tra loro in ragione inversa dei moduli di elasticità assoluta delle rispettive fibre.

Se questi sono uguali, quell' asse passerà pel centro di gravità della sezione: se dissuguali si accosterà più alla faccia convessa od alla concava; secondo che il modulo di elasticità assoluta positiva è maggiore o minore del modulo di elasticità assoluta negativa.

Se ne trova la posizione per le equazioni

$$E_1 \int_0^a Z z z' = E_2 \int_0^b Z z z', \quad \alpha + \beta = a.$$

E queste varrebbero ancora a trovare i rapporti dei moduli rispettivi di elasticità, se la posizione dell' asse neutrale fosse nota.

2. L' asse neutrale ha posizione fissa, se la freccia di curvatura di un pezzo, od incastrato o posato su due appoggi, aggravato di un peso in un suo estremo, o nel punto di mezzo (e rispetto al quale il peso del pezzo è trascurabile) è proporzionale al peso aggravante. Se nò ha posizione variabile.

3. Le sperienze dimostrano che, quando un pezzo a sezioni identiche rettangole s' è minimamente spostato dalla sua positura retta, l' asse neutrale sta *ordinariamente* nel mezzo della sezione; che a misura che il pezzo più si va incurvando, l' asse si va avvicinando alla *faccia convessa* se è di abete, ed alla *faccia concava* se è di ferro: e che quando s' è incurvato tanto, che se per poco più s' incurvasse si romperebbe, trovasi distante dalla faccia concava, nell' abete pei $\frac{1}{3}$ e pel ferro malleabile per l' $\frac{1}{2}$ dell' altezza della sezione.

4. Quando un pezzo per poco si sposta dalla sua positura retta, il suo momento di elasticità uguaglia il momento d' inerzia della sezione valutato rispetto all' asse neutrale, moltiplicato pel modulo di elasticità rispettiva.

La formola è

$$E(2\int_0^a Zx^2 + 2\int_0^b Zx^2).$$

Se il pezzo si sposta tanto dalla positura retta, che si accosta allo stato prossimo alla rottura, la precedente formola non vale: bisognerebbe servirsi dell'altra

$$E_1 \cdot 2\int_0^a Zx^2 + E_2 \cdot 2\int_0^b Zx^2$$

ed anche della

$$E(2\int_0^a Zx^2 + 2n\int_0^b Zx^2).$$

5. La curva di flessione è data di natura e grandezza dalla condizione che la somma dei momenti delle forze intrinseche sviluppate in ogni sezione, valutati rispetto all'asse neutrale sur essa, (somma che uguaglia il prodotto del momento di elasticità nella derivata seconda dell'ordinata della curva) eguagliar deve il momento delle forze estrinseche valutate rispetto ad esso medesimo asse.

La sua equazione generalissima, derivata di second'ordine è

$$ey'' = \int_x^c \gamma I'(\gamma - x) + \Sigma \cdot P(c - x).$$

* Se una è la forza isolata, una sola sarà la equazione, ed un solo il momento sotto il segno Σ ; se nò saranno tante le equazioni (tutte rappresentate dalla precedente) per quante sono esse forze isolate; e di esse equazioni la prima, conterrà sotto il segno Σ i momenti di tutte le forze isolate, e dopo la prima ogni una ne conterrà uno di meno della precedente.

* 6. Le primitive delle derivate seconde, delle equazioni delle curve di flessioni delle diverse parti di un solo e medesimo pezzo aggravato di più pesi o forze isolate, si trovano per le condizioni dell'incastro se ve n'è, e del *raccordamento* che debbono averne le parti nei punti di loro congiungimento. E per tali condizioni possono ottenersi tante equazioni, per quante sono quattro volte, le forze isolate meno una; dalle quali possono determinarsi le forze da applicarsi sul pezzo, onde produrvi certi voluti effetti in rapporto colla sua flessione; ed anche conoscere se per verificarsi certe date condizioni possono o nò esser date tutte le forze estrinseche isolate, o quante di esse.

7. La curva di flessione di un pezzo prismatico orizzontale, incastrato orizzontalmente da un estremo, caricato di pesi uniformemente distribuiti per tutta la sua lunghezza, ed agendovi nell'altro estremo una forza verticale, è una parabola biquadratica. Parimenti se il pezzo è posato su due appoggi orizzontali, ed essendo pur caricato di pesi uniformemente distribuiti tra li appoggi e di un peso addizionale che ne pende da un punto qualunque, le curve di flessioni delle sue due parti, ciascuna compresa tra il punto, onde pende il peso addizionale ed uno delli appoggi, sono pure due parabole biquadratiche; che sono identiche, quando il peso addizionale ne pende dal mezzo.

Se sul pezzo non sono pesi uniformemente distribuiti per la sua lunghezza, ed il suo proprio peso è trascurabile rispetto al peso addizionale, la parabola è cubica.

8. I parametri delle curve di flessione dipendono dalla intensità delle forze estrinseche, e dai punti di loro applicazione: ed a pari forze, esse curve tanto meno si scostano dall'orizzontalità, per quanto più il momento di elasticità è grande.

9. Un pezzo prismatico, orizzontalmente incastrato da un estremo, e caricato di un peso dall'altro estremo, o posato su due appoggi orizzontali e caricato di un peso nel punto di mezzo; *se di peso proprio trascurabile rispetto a quello di che è aggravato*, prende una freccia o ventre di curvatura proporzionale al rapporto del peso di che è aggravato, al suo momento di elasticità. E parimenti se in vece di essere aggravato da un peso unico, lo è da pesi uniformemente distribuiti pel senso orizzontale. Non così se è contemporaneamente aggravato da tutti questi pesi insieme.

10. Di un pezzo prismatico caricato di pesi uniformemente distribuiti per tutta la sua lunghezza orizzontale, se orizzontalmente incastrato da un solo estremo, *la freccia di curvatura* è uguale alla somma di tutt' i pesi di che è aggravato, moltiplicata pel cubo della sua lunghezza orizzontale, e divisa per otto volte il momento di elasticità: se posato su due appoggi orizzontali e parimenti aggravato, la freccia n'è i cinque quarantottesimi della precedente:

* è se incastrato in quelli appoggi, la freccia è la *quinta parte* della precedente, e solo *un quarantottesimo dell'antiprecedente*. *

Le formole per ciascuno di questi tre casi sono rispettivamente

$$h_2 = \frac{\pi c^4}{8s}$$

$$h_2 = \frac{5\pi c^4}{384s}$$

$$h_2 = \frac{\pi c^4}{384s}.$$

11. Un pezzo prismatico, di peso proprio trascurabile rispetto a quello di che è aggravato, se è orizzontalmente incastrato in un estremo ed aggravato di un peso nell'altro, prende una freccia di curvatura uguale al peso moltiplicato nel cubo della lunghezza e diviso *per tre volte* il momento di elasticità:

se posato su due appoggi e gravato dal peso nel suo mezzo, la freccia n'è la *sedicesima parte* della precedente:

* se incastrato sui medesimi appoggi e parimenti gravato, la freccia n'è la *quarta parte* della precedente, e la *sessantaquattresima* dell'antiprecedente. *

Le formole per ciascuno dei tre casi precedenti sono rispettivamente

$$h_1 = \frac{Pc^3}{3s}$$

$$h_1 = \frac{Pc^3}{48s}$$

$$h_1 = \frac{Pc^3}{192s}.$$

12. Di un pezzo prismatico, carico di pesi, nel senso orizzontale uniformemente distribuiti per tutta la sua lunghezza, ed aggravato di un peso addizionale, qualunque ne sia la sezione, la freccia o ventre di curvatura n'è data per le formole seguenti.

Essendo incastrato orizzontalmente da un estremo, e dall'altro estremo aggravato dal peso addizionale, da

$$h = \frac{(3\pi c + 8P)c^3}{24s}.$$

Essendo posato su due sostegni, pendendone il peso addizionale dal punto di mezzo tra li appoggi, da

$$h = \frac{(5\Pi c + 8P)c^3}{16 \cdot 24s}.$$

Essendo incastrato nei medesimi sostegni, pur pendendone il peso dal punto di mezzo

$$h = \frac{(\Pi c + 2P)c^3}{16 \cdot 24s}.$$

13. Un pezzo prismatico incastrato orizzontalmente da un estremo; o posato su due appoggi orizzontali; od orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi, sia aggravato di un peso molto grande rispetto al suo proprio, così che questo sia trascurabile rispetto a quello, e ne penda dall'estremo quando uno è l'incastrato, o dal mezzo quando sono due. Se quel peso aggravante si ripartisca in vece ugualmente per tutta la lunghezza orizzontale, il pezzo prenderà una freccia di curvatura, pari ai cinque ottavi di quella che prendeva prima.

Freccie o centri di curvatura per pezzi di sezioni particolari.

14. La freccia di curvatura di un pezzo a sezioni rettangole, è data dalle formole seguenti:

Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti;
orizzontalmente incastrato da un estremo

$$h_2 = \frac{1}{E} \cdot \frac{3\Pi c^4}{2a^3b};$$

posato su due appoggi orizzontali

$$h_2 = \frac{1}{E} \cdot \frac{5\Pi c^4}{32a^3b};$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi

$$h_2 = \frac{1}{E} \cdot \frac{\Pi c^4}{32a^3b};$$

Pezzi carichi di un sol peso, e di proprio peso trascurabile rispetto a quello di che è aggravato:
orizzontalmente incastrato da un estremo, ed il peso all'altro estremo

$$h_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{4Pc^3}{a^3b};$$

posato su due appoggi orizzontali ed il peso nel mezzo

$$h_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{Pc^3}{4a^3b};$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi ed il peso nel mezzo

$$h_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{Pc^3}{16a^3b};$$

Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti e di un peso addizionale,

orizzontalmente incastrato da un estremo, ed il peso addizionale all'altro estremo

$$h = \frac{1}{E} \cdot \frac{(3\pi c + 8P)c^3}{2a^3b};$$

posato su due appoggi orizzontali, ed il peso addizionale nel mezzo

$$h = \frac{1}{E} \cdot \frac{(5\pi c + 8P)c^3}{32a^3b};$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi, ed il peso addizionale nel mezzo

$$h = \frac{1}{E} \cdot \frac{(\pi c + 2P)c^3}{32a^3b}.$$

15. Il ventre di curvatura di un pezzo a sezioni identiche, con due rinfianchi in cima e due in base, tutti eguali tra loro, posato su due sostegni orizzontali è dato dalle formole seguenti (a).

Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti

$$h_2 = \frac{1}{E} \cdot \frac{5\pi c^4}{32\{a^3b + 2a_1b_1[3a(a - 2a_1) + 4a_1^2]\}};$$

Pezzi carichi di un sol peso nel mezzo, e di proprio peso trascurabile rispetto a quello di che è aggravato

$$h_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{Pc^3}{4\{a^3b + 2a_1b_1[3a(a - 2a_1) + 4a_1^2]\}};$$

(a) Se i due rinfianchi in cima, non fossero uguali ai due rinfianchi in base, il quale caso suol essere meno frequente di quello detto di sopra, si determinerà il momento di elasticità $\pi = EM$ per le cose dette al numero 196; e quindi si troveranno le frecce o ventri di curvatura per le formole generali date dai principii 10, 11, 12.

Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti e di un peso addizionale nel mezzo

$$h = \frac{1}{E} \cdot \frac{(5\Pi c + 8P)c^3}{32\{a^5b + 2a_1b_1[3a(a-2a_1) + 4a^2]\}}.$$

16. Il ventre di curvatura di un pezzo a sezioni identiche rettangole con rinflanchi uguali in cima ed in base; e tali che la larghezza totale della sezione, è uguale alla sua altezza, e la spessore dei rinflanchi e del rettangolo centrale la decima parte di essa altezza; è dato dalle formole seguenti.

Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti: posato su due appoggi orizzontali

$$h_2 = \frac{1}{E} \cdot \frac{3125\Pi c^4}{10784a^4};$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi

$$h_2 = \frac{1}{E} \cdot \frac{625\Pi c^4}{10784a^4}.$$

Pezzi carichi di un sol peso, e di proprio peso trascurabile rispetto a quello di che è aggravato:

posto su due appoggi orizzontali, ed il peso nel mezzo

$$h_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{625Pc^3}{1348a^4};$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi, ed il peso nel mezzo

$$h_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{625Pc^3}{5392a^4}.$$

Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti e di un peso addizionale nel mezzo:

posato su due appoggi orizzontali

$$h = \frac{1}{E} \cdot \frac{625(5\Pi c + 8P)c^3}{10784a^4};$$

incastrato nei medesimi appoggi

$$h = \frac{1}{E} \cdot \frac{625(\Pi c + 2P)c^3}{10784a^4}.$$

17. La freccia o ventre di curvatura, di un pezzo a T diritto, o rorescio, ossia di sezioni rettangole, con rinflan-

chi solo in cima, o solo in base, di area doppia di quella del rettangolo, è data dalle formole seguenti (a).

Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti;
posato su due appoggi orizzontali

$$h_2 = \frac{1}{E} \cdot \frac{5\pi c^4}{32[a^3b - 2aba_1(a+a_1)]};$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi

$$h_2 = \frac{1}{E} \cdot \frac{\pi c^4}{32[a^3b - 2aba_1(a+a_1)]}.$$

Pezzi carichi di un sol peso che ne pende dal mezzo, e di proprio peso trascurabile rispetto a quello di che è aggravato;
posato su due appoggi orizzontali ed il peso nel mezzo

$$h_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{Pc^3}{4[a^3b - 2aba_1(a+a_1)]};$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi, ed il peso nel mezzo

$$h_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{Pc^3}{16[a^3b - 2aba_1(a+a_1)]}.$$

Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti e di un peso addizionale che ne pende dal mezzo:
posato su due appoggi orizzontali

$$h = \frac{1}{E} \cdot \frac{(5\pi c + 8P)c^3}{32[a^3b - 2aba_1(a+a_1)]};$$

incastrato nei medesimi appoggi

$$h = \frac{1}{E} \cdot \frac{(\pi c + 2P)c^3}{32[a^3b - 2aba_1(a+a_1)]}.$$

18. La freccia di curvatura di un pezzo prismatico a sezioni identiche circolari; è data dalle formole seguenti:

Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti;
orizzontalmente incastrato da un estremo

$$h_2 = \frac{1}{E} \cdot \frac{5\pi c^4}{2d^4};$$

(a) Se l'area della parte orizzontale del pezzo a T, serbasse proporzione diversa da questa alla sua parte verticale, il quale caso non è tanto frequente quanto quello detto di sopra, si determinerà il momento di elasticità $= 5M$ per le cose dette al n.° 203, e quindi si troveranno le frecce o ventri di curvatura per le formole generali date dai principii, 10. 11, e 12.

posato su due appoggi orizzontali

$$h_2 = \frac{1}{E} \cdot \frac{25\pi c^4}{96d^4};$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi

$$h_2 = \frac{1}{E} \cdot \frac{5\pi c^4}{96d^4}.$$

Pezzi carichi di un sol peso, e di proprio peso trascurabile rispetto a quello di che è aggravato:

orizzontalmente incastrato da un estremo, ed il peso dall'altro estremo

$$h_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{20Pc^3}{3d^4};$$

posato su due appoggi orizzontali, ed il peso nel mezzo

$$h_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{5Pc^3}{12d^4};$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi ed il peso nel mezzo

$$h_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{Pc^4}{12d^4}.$$

Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti e di un peso addizionale:

orizzontalmente incastrato da un estremo, ed il peso addizionale dall'altro estremo

$$h = \frac{1}{E} \cdot \frac{5(3\pi c + P)c^3}{6d^4};$$

posato su due appoggi orizzontali, ed il peso addizionale nel mezzo

$$h = \frac{1}{E} \cdot \frac{5(5\pi c + 8P)c^3}{96d^4};$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi, ed il peso addizionale nel mezzo

$$h = \frac{1}{E} \cdot \frac{5(\pi c + 2P)c^3}{96d^4}.$$

19. Il ventre di curvatura di un pezzo *prismatico tubulare* a sezioni rettangole è dato dalle formole seguenti:

Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti:

posato su due appoggi orizzontali

$$h_2 = \frac{1}{E} \cdot \frac{15\pi c^4}{96(A^3B - a^3b)};$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi

$$h_2 = \frac{1}{E} \cdot \frac{3\pi c^4}{96(A^3B - a^3b)}.$$

Pezzi carichi di un sol peso nel mezzo, e di proprio peso trascurabile rispetto a quello di che è aggravato: posato su due appoggi

$$h_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{Pc^3}{4(A^3B - a^3b)};$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi

$$h_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{Pc^3}{16(A^3B - a^3b)}.$$

20. Il ventre di curvatura di un pezzo *prismatico tubulare a sezioni circolari*, è dato dalle formole seguenti.

Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti nel senso orizzontale:

posato su due appoggi orizzontali

$$h_2 = \frac{1}{E} \cdot \frac{25\pi c^4}{96(D^4 - d^4)};$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi

$$h_2 = \frac{1}{E} \cdot \frac{5\pi c^4}{96(D^4 - d^4)}.$$

Pezzi carichi di un sol peso, e di proprio peso trascurabile rispetto a quello di che è aggravato:

posato su due appoggi orizzontali ed il peso nel mezzo

$$h_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{5Pc^3}{12(D^4 - d^4)};$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi ed il peso nel mezzo

$$h_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{Pc^3}{12(D^4 - d^4)}.$$

Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti e di un peso addizionale nel mezzo:

posato su due appoggi orizzontali

$$h = \frac{1}{E} \cdot \frac{5(5\pi c + 8P)c^3}{96(D^4 - d^4)};$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi

$$h = \frac{1}{E} \cdot \frac{5(\pi c + 2P)c^3}{96(D^4 - d^4)}.$$

Principii Generali in ordine alla rottura.

21. Se vogliasi che in un pezzo di cui è mess' a cemento la resistenza rispettiva, nissuna sua fibra soffra una tensione o pressione maggiore di una data misura; è necessario che il momento d'inerzia di ciascuna sezione del pezzo valutato rispetto all'asse neutrale, moltiplicato pel peso che misura essa tensione o pressione sull'unità superficiale (un oncia quadrata) e diviso per la distanza delle fibre nella sezione le più lontane dall'asse neutrale medesimo, eguagli la somma dei momenti delle forze estrinseche, valutati rispetto all'asse stesso.

La regola vale, finchè il pezzo *non perde* di sua elasticità, ossia finchè il peso che misura la data tensione o compressione, sia una frazione del modulo di resistenza rispettiva, pei legnami tra $\frac{1}{4}$ ed $\frac{1}{16}$, pei metalli fusi tra $\frac{1}{4}$ ed $\frac{1}{8}$ e pei metalli malleabili tra $\frac{1}{2}$ ed $\frac{1}{4}$.

La formola è

$$\frac{R'}{x} (2 \int_0^x Z z^2 z' + 2 \int_0^x Z z^2 z') = \int_x^c \gamma \gamma' (\gamma - x) + \Sigma \cdot F (c - x).$$

22. Quando un pezzo di cui si mette a cemento la resistenza rispettiva è prismatico, cioè a sezioni trasversali identiche, le fibre sue sono *diversamente tese da una sezione all'altra*; e le più tese o compresse sono in quella rispetto al di cui asse neutrale, la somma dei momenti delle forze estrinseche agenti sul pezzo ha il più gran valore. Risponde a quel punto della linea di flessione del pezzo, nel quale la sua curvatura è la più grande.

23. Il momento di resistenza rispettiva è uguale al momento d'inerzia della sezione del pezzo, ove sono le sue fibre le più tese o compresse, valutato rispetto all'asse neutrale, moltiplicato per una certa frazione del modulo di resistenza rispettiva che misura lo sforzo di esse fibre, e diviso per la distanza delle fibre nella sezione le quali sono le più lontane dall'asse neutrale medesimo.

Ciò dà luogo alla relazione

$$p = \frac{R'}{x} M.$$

24. Un pezzo prismatico orizzontale caricato di pesi uniformemente distribuiti nel senso orizzontale, e di un peso addizionale ha le fibre le più tese o le più compresse: nella sezione d'incastro, se incastrato da un estremo ed il peso ne pende dall'altro estremo: nella sezione onde passa la direzione del peso addizionale se posato su due appoggi orizzontali ed il peso ne pende da luogo tra li appoggi:

* nelle due sezioni d'incastro, se incastrato in essi appoggi.

E lo stesso ha luogo quando non siavi peso addizionale; o quando questo sia tanto grande, da essere trascurabile rispetto ad esso il peso proprio del pezzo, nè siavi peso uniformemente distribuito.

* In questo caso, quando il pezzo è incastrato nelli due appoggi le fibre più tese o compresse stanno sì nelle sezioni d'incastro, che nella sezione di mezzo, quando da essa pende il peso.

È a presumere, che il pezzo si romperebbe nelle dette sezioni, quando fosse caricato di pesi da non poter reggere.

* 25. Quando uno stesso peso va camminando per su un pezzo ossia una trave posata su due appoggi orizzontali, al camminare del peso le fibre del pezzo in ciascuna medesima sezione, sono variamente tese o premute; ma quando passa nella sezione di mezzo, allora soffrono il più grande sforzo. *

26. Le dimensioni che aver deve un pezzo prismatico, cioè a sezioni trasversali identiche, o le intensità delle forze che debbono agirvi sù, perchè non abbia fibre tese o compresse oltre una certa misura (frazione del modulo di resistenza rispettiva) sono date dalla equazione che nasce uguagliando il momento di resistenza rispettiva corrispondente ad essa misura, alla quantità che si ottiene mettendo nella somma dei momenti delle forze estrinseche quel valore della variabile, che le fa acquistare il più gran valore.

27. Un pezzo prismatico orizzontale, orizzontalmente incastrato da un estremo e caricato nell'altro estremo, da un peso grande rispetto al peso proprio del pezzo, tale che questo sia trascurabile rispetto a quello, ne reggerà uno doppio quando si distribuisca uniformemente per tutta la sua lunghezza orizzontale, senza che per questo le sue fibre sof-

frano sforzo maggiore, ossia senza che siano maggiormente tese o compresse. E lo stesso avverrà se il pezzo sia semplicemente posato su due appoggi e caricato di un peso nel suo mezzo.

* E se è incastrato dai due capi ne reggerà uno, una volta e mezzo più grande di quello che ne pendeva dal mezzo. *

* 28. Lo sforzo che soffre una trave orizzontalmente incastrata coi due estremi, è minore di quello che soffrirebbe se fosse semplicemente posata su due appoggi orizzontali messi nel luogo degli incastri.

Se caricata soltanto di pesi uniformemente distribuiti tra li appoggi, quando incastrata, reggerà un peso pari ad una volta e mezzo quello che regge quando posato soltanto; e se carica di un solo gran peso nel mezzo, tale che rispetto ad esso sia trascurabile il peso proprio della trave, quando incastrata, reggerà un peso doppio di quello, che regge quando posato soltanto: e non pertanto soffrirà in ambi i casi un eguale sforzo. *

29. Un pezzo prismatico orizzontale a sezioni identiche caricato di pesi, *in quanto al modo come è sostenuto*, a tutte le altre cose pari,

è il più resistente se è incastrato dai due estremi, e così che quivi le sue fibre si mantengano per quanto più si possa orizzontali:

è meno resistente se posato su due appoggi orizzontali:

e anche meno resistente, se incastrato da un estremo e dall'altro è libero.

N. B. Ordinariamente, non essendo possibile incastrare invincibilmente un pezzo pei suoi estremi, è prudente (soprattutto in casi delicati) valutarne le dimensioni od il carico, come se dovesse essere solamente posato su due appoggi orizzontali; e pur tuttavia incastrarsi per quanto meglio sarà possibile. Negli incastri si ponga attenzione maggiore a farne inalterabili le pareti più verso il fondo, che non verso il labro.

30. La più gran forza che può reggere un pezzo parallelepipedo rettangolo, di cui si mette a cimento la resistenza rispettiva, è nella ragione composta, della diretta del quadrato della sua altezza e della semplice della larghezza, e nella inversa della lunghezza.

31. Come pezzi di resistenza *sono da preferirsi* quelli che sono più alti che larghi: ed un medesimo pezzo debbe adoperarsi in costa e non in piatto.

32. Un asse rotante v'è fatto di sezione, o quadrata, o circolare, o cruceiforme greca.

33. I rinflanchi centrali valgono a corroborare il pezzo in quanto alla stabilità per traverso, ma non in quanto alla resistenza. I rinflanchi in cima ed in base il corroborano non solo in quanto alla stabilità, ma ancora, in quanto alla resistenza. Quelli si adotteranno, quando il pezzo può trovarsi a giacere in due positure diverse ad angolo retto: questi, quando debbe giacere sempre nella medesima posizione.

34. I pezzi di sezione rettangola, corroborati da rinflanchi in cima ed in base, a tutte le altre cose pari, sono tanto più resistenti, per quanto più i rinflanchi sono larghi e sottili.

35. Di due pezzi a sezioni equivalenti, le resistenze rispettive stanno nelle ragioni seguenti:

se una quadrata e l'altra rettangola; come il minor lato della sezione rettangola al lato della sezione quadrata:

se una quadrata e l'altra circolare, come 12,337 sta a 12:

se una rettangola e l'altra di uguale altezza ma a rinflanchi uguali in cima ed in base, e tali che la larghezza totale della sezione sia uguale alla sua altezza, e la spessorezza dei rinflanchi e del rettangolo centrale la decima parte di essa altezza, la resistenza del pezzo a rinflanchi sarà due volte e mezzo quella della trave senza rinflanchi.

36. I pezzi tubulari rettangoli, a pari quantità di materia, sono tanto più resistenti, per quanto più esili ne sono le pareti, e più ampio il cavo; e così pure i tubulari cilindrici: ed a pari quantità di materia quelli sono più resistenti di questi. In entrambi, se i pesi aggravanti, stanno nell'interno di essi, bisogna tener conto ancora della resistenza assoluta positiva: e nei rettangoli anche di quella di aderenza.

37. I pezzi prismatici a sezioni identiche, diverse nei diversi pezzi ma equivalenti, a tutte le altre cose pari, scemano in resistenza rispettiva, secondo l'ordine seguente.

1.^o *Rettangola , a rinfianchi in cima ed in base ; e tanto più sono resistenti , per quanto più questi sono larghi e bassi ed il rettangolo alto e sottile.*

2.^o *Tubulare rettangola ; e tanto più sono resistenti , per quanto più di ampio cavo e di esili pareti.*

3.^o *A T : e tanto più resistenti , per quanto più è alta e stretta la parte verticale , e larga e bassa la orizzontale.*

4.^o *Rettangola messa in costa: e tanto più resistente , per quanto più è alta e stretta.*

5.^o *Rettangola a rinfianchi centrali: e tanto più resistente, per quanto più sì il rettangolo , che i rinfianchi sono alti e stretti.*

6.^o *Croceiforme greca.*

7.^o *Tubulare circolare : e tanto più resistente , quanto più è grande il diametro del tubo , e sottile la sua parete.*

8.^o *Quadrata.*

9.^o *Circolare.*

38. Se vogliasi che un pezzo prismatico , orizzontalmente incastrato da un estremo , caricato di pesi per tutta la sua lunghezza , e di un peso addizionale dall' altro estremo , non soffra sforzo maggiore di una data misura , facciasi di tali dimensioni la sua sezione che il momento di resistenza rispettiva corrispondente al dato sforzo uguagli il prodotto della semisomma dei pesi uniformemente distribuiti più il peso addizionale , nella lunghezza del pezzo.

La equazione è

$$p = \left(\frac{\pi c}{2} + P \right) c.$$

Se non v'è peso addizionale, vi si faccia $P = 0$. Se non sianvi pesi uniformemente distribuiti , ed il peso proprio del pezzo sia trascurabile rispetto al peso addizionale facciavisi $\pi = 0$.

39. Se vogliasi che un pezzo prismatico , posato su due appoggi orizzontali , caricato tra li appoggi di pesi uniformemente distribuiti e di un peso addizionale che ne pendesse dal mezzo non soffra sforzo maggiore di data misura ; facciasi di tali dimensioni la sua sezione , che il momento di resistenza rispettiva corrispondente al dato sforzo , uguagli

il prodotto della semisomma dei pesi uniformemente distribuiti più il peso addizionale, nella quarta parte della distanza degli appoggi.

La equazione è

$$\rho = \left(\frac{\Pi c}{2} + P \right) \frac{c}{4}.$$

* Se il peso addizionale non penda proprio dal mezzo, ma da una sezione tra li appoggi distante per n dal punto di mezzo, la equazione sarà

$$\rho = \left(\frac{c^2}{4} - n^2 \right) \left(\frac{\Pi c + 2P}{2c} \right).$$

In entrambe facciasi $P=0$ se non v'è peso addizionale. E se non sianvi pesi uniformemente distribuiti, ed il proprio peso del pezzo sia trascurabile rispetto al peso addizionale, vi si faccia $\Pi=0$.

* 40. Se vogliasi che un pezzo prismatico, posato su due appoggi orizzontali e caricato di pesi uniformemente distribuiti tra li appoggi, non soffra sforzo maggiore di uno dato, mentre un peso mobile vi camina per sopra dall'uno all'altro appoggio si determinino le dimensioni della sua sezione, come se il peso mobile ne pendesse dal mezzo.

* 41. Se vogliasi che un pezzo prismatico orizzontalmente incastrato dai due estremi, caricato tra gli incastri di pesi uniformemente distribuiti e di un peso addizionale che ne penda dal mezzo, non soffra sforzo maggiore di uno dato; facciasi di tali dimensioni la sua sezione, che il momento di resistenza rispettiva corrispondente al dato sforzo, uguagli il prodotto dei due terzi della somma dei pesi ugualmente distribuiti, più il peso addizionale, nella ottava parte della distanza degli incastri.

La equazione è

$$\rho = \left(\frac{2\Pi c}{3} + P \right) \frac{c}{8}.$$

Se non siavi peso addizionale, vi si ponga $P=0$. Se non sianvi pesi uniformemente distribuiti; ed il proprio peso del pezzo sia trascurabile rispetto al peso che ne pende dal mezzo, vi si faccia $\Pi=0$.

Equazioni per determinare le dimensioni dei pezzi, onde le fibre di essi, le più tese e le più compresse, non lo siano oltre una data misura.

42. Un pezzo prismatico a sezione rettangola non perderà di sua elasticità, se o le dimensioni della sua sezione, od in

posato sui medesimi appoggi, col peso addizionale distante per n dal mezzo

$$\frac{2R'}{3} \cdot \frac{a^2 b c}{c^2 - 4n^2} = \frac{\pi e}{2} + P;$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi, col peso addizionale nel mezzo.

$$\frac{4R'}{3} \cdot \frac{a^2 b}{c} = \frac{2\pi e}{3} + P.$$

N. B. Quando il pezzo, potesse essere soggetto a qualche sforzo addizionale eventuale, oltre i pesi n , e P , sarà utile non fare proprio questi pezzi di sezione rettangola. Determinatene le dimensioni delle sezioni rettangole, il lato della sezione verso la concavità si allargherà alquanto se il pezzo è di legname; si allargherà verso la convessità se è di ferro: e più se è di ferro fuso, che se è di ferro battuto.

43. Un pezzo prismatico a sezioni identiche cruceiformi, non perderà di sua elasticità, se o le dimensioni della sua sezione od in vece le forze o pesi che vi agiscono, saranno determinate per ciascun caso dalle equazioni seguenti.

Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti:

incastrato orizzontalmente da un estremo

$$\frac{R'}{3c^2} \left[a^2 b + \left(1 - \frac{b}{a} \right) b^3 \right] = n;$$

posato su due appoggi

$$\frac{4R'}{3c^2} \left[a^2 b + \left(1 - \frac{b}{a} \right) b^3 \right] = n.$$

Pezzi carichi di un sol peso, e di proprio peso trascurabile rispetto a quello di che è aggravato:

incastrato orizzontalmente da un estremo, col peso che ne pende dall'altro estremo

$$\frac{R'}{6c} \left[a^2 b + \left(1 - \frac{b}{a} \right) b^3 \right] = P;$$

posato su due appoggi, col peso che ne pende dal mezzo

$$\frac{2R'}{3c} \left[a^2 b + \left(1 - \frac{b}{a} \right) b^3 \right] = P.$$

Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti, e di un peso addizionale:

incastrato orizzontalmente da un estremo, col peso addizionale nell'altro estremo

$$\frac{R'}{6c} \left[a^2b + \left(1 - \frac{b}{a} \right) b^3 \right] = \frac{\Pi c}{2} + P$$

posato su due estremi, col peso addizionale nel mezzo.

$$\frac{2R'}{3} \left[a^2b + \left(1 - \frac{b}{a} \right) b^3 \right] = \frac{\Pi c}{2} + P.$$

44. Un pezzo prismatico a sezioni identiche rettangole, corroborato da rinflanchi uguali in cima ed in base, non perderà di sua elasticità, se o le dimensioni della sua sezione od in vece le forze o pesi che vi agiscono sù, saranno determinate per ciascun caso dalle equazioni seguenti (a).

Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti:

posato su due appoggi orizzontali

$$\frac{4R'}{3c^2} \left\{ a^2b + 2a_1b_1 \left[3(a - 2a_1) + \frac{4a_1^2}{a} \right] \right\} = \Pi;$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi

$$\frac{2R'}{c^2} \left\{ a^2b + 2a_1b_1 \left[3(a - 2a_1) + \frac{4a_1^2}{a} \right] \right\} = \Pi.$$

Pezzi carichi di un sol peso e di proprio peso trascurabile rispetto a quello di che è aggravato:

posato su due appoggi orizzontali ed il peso fisso nel mezzo, o che debba percorrerlo da un capo all'altro

$$\frac{2R'}{3c} \left\{ a^2b + 2a_1b_1 \left[3(a - 2a_1) + \frac{4a_1^2}{a} \right] \right\} = P;$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi ed il peso nel mezzo

$$\frac{4R'}{3c} \left\{ a^2b + 2a_1b_1 \left[3(a - 2a_1) + \frac{4a_1^2}{a} \right] \right\} = P.$$

Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti, e di un peso addizionale:

(a) Se i due rinflanchi in cima, non fossero uguali ai due rinflanchi in base, il quale caso suole essere meno frequente di quello detto di sopra.

si determinerà il momento di resistenza rispettivo $\varphi = \frac{R'}{a} M$ per le cose dette al n.° 106; e quindi, per ciascun caso, si avrà la equazione determinante delle dimensioni del pezzo, per mezzo delle equazioni generali date dai principii 38, 39, 40, 41.

posato su due appoggi orizzontali, ed il peso addizionale fisso nel mezzo, o che debba percorrerlo da un capo all'altro,

$$\frac{2R'}{3c} \left\{ a^2b + 2a_1b_1 \left[3(a - 2a_1) + \frac{4a_1^2}{a} \right] \right\} = \frac{\pi c}{2} + P;$$

incastrato nei medesimi appoggi ed il peso addizionale nel mezzo,

$$\frac{4R'}{3c} \left\{ a^2b + 2a_1b_1 \left[3(a - 2a_1) + \frac{4a_1^2}{a} \right] \right\} = \frac{2\pi c}{3} + P.$$

N. B In tutti questi pezzi, se alcuna forza eventuale potesse venire ad aggiungersi al peso P , sarà bene, dopo averne determinate le dimensioni della sezione, ingrossarne un poco i fianchi verso la concavità se il pezzo è di legname; verso la convessità se è di ferro. Essendo di ferro fuso si crede esser meglio sopprimere addirittura i fianchi verso la concavità, e dare dimensioni doppie a quelli verso la convessità; e se ne determineranno le dimensioni pel principio 46.

45. Un pezzo prismatico a sezioni identiche con rinfianchi uguali in cima ed in base; e così che l'altezza della sezione sia uguale alla sua larghezza totale, e le parti sue grosse il decimo dell'altezza, posato su due appoggi, non perderà di sua elasticità, se le dimensioni della sua sezione od in vece le forze o pesi che vi agiscono sù, saranno determinate dalle equazioni seguenti:

quando è carico di pesi uniformemente distribuiti, da

$$\frac{1318R'a^3}{1875c^2} = \pi;$$

quando è carico di un peso che ne pende dal mezzo, o che vi passeggia per di sopra, e di proprio peso trascurabile rispetto a quello di che è aggravato, da

$$\frac{674R'a^3}{1875c} = P;$$

quando è carico di pesi uniformemente distribuiti, ed in oltre di un peso addizionale che ne pende dal mezzo, o che vi camina per di sopra da

$$\frac{674R'a^3}{1875c} = \frac{\pi c}{2} + P.$$

46. Un pezzo a **T** diritto o rovescio, ossia a sezione rettangola con rinfianchi solo in cima, o solo in base, di area doppia di quella del rettangolo, non perderà di sua elasticità quando, posato su due appoggi, le dimensioni della sua sezione, od in vece le forze o pesi che vi agiscono su, saranno determinate per le equazioni seguenti (a):

quando il pezzo è caricato di pesi uniformemente distribuiti,

$$\frac{4R'}{3c^2} [a^2b - 2ba_1(a+a_1)] = \Pi;$$

quando è aggravato da un peso che ne pende dal mezzo, o che vi camina per sopra, e così grande che può aversi rispetto ad esso, come trascurabile il peso suo proprio,

$$\frac{2R'}{3c} [a^2b - 2ba_1(a+a_1)] = P;$$

quando è caricato da pesi uniformemente distribuiti per la sua lunghezza, ed in oltre da un peso addizionale che ne pende dal mezzo, o che vi camina per di sopra

$$\frac{2R'}{3c} [a^2b - 2ba_1(a+a_1)] = \frac{\Pi c}{2} + P.$$

47. Un pezzo prismatico a sezioni identiche circolari: non perderà di sua elasticità se, o il diametro di sua sezione, od in vece le forze o pesi che vi agiscono su saranno determinate per ciascun caso dalle equazioni seguenti.

Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti:

orizzontalmente incastrato da un estremo

$$\frac{R'}{5} \cdot \frac{d^3}{c^2} = \Pi;$$

posato su due appoggi orizzontali

$$\frac{4R'}{5} \cdot \frac{d^3}{c^2} = \Pi;$$

(a) Se l'area della parte orizzontale del pezzo a **T**, scabbasse ragione diversa della sopradetta, alla sua parte verticale, il qual caso è meno frequente di quello detto di sopra, si determinerà il momento di resistenza rispettiva $p = \frac{R'}{\alpha} M$, per le cose dette al n.° 203; e quindi si avrà per ciascun caso la equazione determinatrice delle dimensioni del pezzo, o dei pesi o forze, per mezzo dell'equazioni generali date dai principii 38, 39, 40, 41.

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi

$$\frac{6R'}{5} \cdot \frac{d^5}{c^2} = \Pi.$$

Pezzi carichi di un sol peso, e di proprio peso trascurabile rispetto a quello di che ciascuno è aggravato:

orizzontalmente incastrato da un estremo, e col peso aggravante dall'altro estremo

$$\frac{R'}{10} \cdot \frac{d^5}{c} = P;$$

posato su due appoggi orizzontali ed il peso nel mezzo, o mobile sopra di esso dovendolo percorrere da un capo all'altro

$$\frac{2R'}{5} \cdot \frac{d^5}{c} = P;$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi, ed il peso nel mezzo

$$\frac{4R'}{5} \cdot \frac{d^5}{c} = P.$$

Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti, e di un peso addizionale:

orizzontalmente incastrato da un estremo, e col peso addizionale dall'altro estremo

$$\frac{R'}{10} \cdot \frac{d^5}{c} = \frac{\Pi c}{2} + P;$$

posato su due appoggi orizzontali

$$\frac{2R'}{5} \cdot \frac{d^5}{c} = \frac{\Pi c}{2} + P;$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi

$$\frac{4R'}{5} \cdot \frac{d^5}{c} = \frac{2\Pi c}{3} + P.$$

48. *Un pezzo prismatico tubulare a sezioni rettangole, non perderà di sua elasticità, se le dimensioni di sua sezione, od in vece le forze o pesi che vi agiscono sù, saranno determinate per ciascun caso dalle equazioni seguenti.*

Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti:

posato su due appoggi orizzontali

$$\frac{2R'}{3} \cdot \frac{A^2 B - \frac{a^2 b}{A}}{c^2} = \Pi;$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi

$$R' \cdot \frac{A^2 B - \frac{a^2 b}{A}}{c^2} = \Pi.$$

Pezzi carichi di un sol peso che ne pende dal mezzo, o che deve percorrerli dall'uno all'altro capo; e di proprio peso trascurabile rispetto a quello di che sono aggravati: posato su due appoggi

$$\frac{R'}{3} \cdot \frac{A^2 B - \frac{a^2 b}{A}}{c} = P;$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi

$$\frac{2R'}{3} \cdot \frac{A^2 B - \frac{a^2 b}{A}}{c} = P.$$

N. B. Sarà utile in questi pezzi, dopo determinatene le sezioni per le formole di sopra, che suppongono uguali le grossezze dei due lati superiore ed inferiore del tubo, ingrossar~~ne~~ne alquanto, se di legno il lato che si troverà verso la concavità; se di ferro, quello che sarà verso la convessità; e nel ferro fuso più che nel malleabile. Le parti laterali, quanto più si faranno esili tanto sarà meglio.

49. *Un pezzo prismatico tubulare a sezioni identiche circolari*, non perderà di sua elasticità, se o le dimensioni di sua sezione, od in vece le forze o pesi che vi agiscono su, saranno per ciascun caso determinate dalle equazioni seguenti, *Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti: posato su due appoggi orizzontali*

$$\frac{4R'}{5} \cdot \frac{D^5 - \frac{d^4}{D}}{c^2} = \Pi;$$

orizzontalmente incastrato nei medesimi appoggi

$$\frac{6R'}{5} \cdot \frac{D^5 - \frac{d^4}{D}}{c^2} = \Pi.$$

Pezzi carichi di un sol peso che ne pende dal mezzo, o che debba percorrerlo da un capo all'altro, e di proprio peso trascurabile rispetto a quello di che sono aggravati:

posato su due appoggi

$$\frac{4R'}{10} \cdot \frac{D^3 - \frac{d^4}{D}}{c} = P;$$

orizzontalmente, incastrato nei medesimi appoggi

$$\frac{4R'}{5} \cdot \frac{D^3 - \frac{d^4}{D}}{c} = P.$$

Pezzi carichi di pesi uniformemente distribuiti, e di un peso addizionale nel mezzo; o di un peso mobile che debba percorrerli da un capo all'altro:

posato su due appoggi

$$\frac{2R'}{5} \cdot \frac{D^3 - \frac{d^4}{D}}{c} = \frac{\Pi c}{2} + P;$$

incastrato nei medesimi appoggi

$$\frac{4R'}{5} \cdot \frac{D^3 - \frac{d^4}{D}}{c} = \frac{2\Pi c}{3} + P.$$

Pezzi di ugual resistenza.

50. La sezione longitudinale di un pezzo di ugual resistenza rispettiva debbe determinarsi per la condizione, che il momento di resistenza valutato per ogni sezione debb' essere sempre uguale alla somma dei momenti delle forze estrinseche valutati per ciascuna medesima sezione.

La equazione generalissima è

$$\frac{2R'}{\alpha} \left(\int_0^\alpha Z z^2 z' + \int_0^\beta Z z^2 z' \right) = \int_0^\alpha \gamma \gamma' (\gamma - x) + \Sigma \cdot F(c - x).$$

E se il pezzo debba essere di sezione trasversale sempre rettangola sarà l'altra

$$\frac{2}{3} R' b \alpha^2 = \int_x^c \gamma \gamma' (\gamma - x) + \Sigma \cdot F(c - x),$$

nella quale le α e b potranno variare insieme: se le facce laterali del pezzo si vorranno piane e parallele, si farà variare solamente la α .

51. Perchè un pezzo tutto ugualmente largo ed incastrato da un estremo, sia di ugual resistenza, debbe avere per sezioni longitudinali le curve seguenti.

Se caricato uniformemente da pesi, e dall' altro estremo da un peso addizionale :

Iperbola, col centro al di là dell' estremo del pezzo, per quanto è il rapporto del peso che ne pende al peso uniformemente distribuito per ciascuna unità: e di assi il reale uguale al rapporto medesimo, e l'immaginario uguale alla metà del peso che ne pende, moltiplicato per la radice del quoziente di tre pel peso uniformemente distribuito, moltiplicato nella larghezza delle sezioni, e nell' adottata frazione del modulo di resistenza rispettiva.

La equazione della curva è

$$3\pi^2 x_1^2 - 4R'b\alpha^2 = 3P^2.$$

L' altezza massima del pezzo sarà data dalla

$$2\alpha = \sqrt{\frac{3(\pi c + 2P)c}{R'b}}.$$

Se caricato nel solo suo estremo da peso così grande che il peso proprio del pezzo possa aversi come trascurabile rispetto ad esso:

Parabola, di vertice l' estremo onde pende il peso, e di parametro i tre mezzi di esso peso, diviso pel prodotto della larghezza del pezzo nell' adottata frazione del modulo di resistenza.

La equazione è

$$2R'bx^2 = 3Px_1.$$

L' altezza massima del pezzo sarà data dalla

$$2\alpha = 2\sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{Pc}{R'b}}.$$

Se caricato solo di pesi uniformemente distribuiti :

Triangolo isoscele, colla base nell' incastro, uguale alla radice quadrata del triplo del peso che grava il pezzo, nella lunghezza sua, diviso pel prodotto della larghezza nello sforzo massimo cui si vuole soggiacciono le sue fibre.

La equazione è

$$4R'bx^2 = 3\pi x_1^2.$$

N. B. Se fosse necessità che il pezzo si terminasse superiormente in un piano orizzontale; cosicchè la sua sezione

longitudinale dovesse terminarsi superiormente da una retta, si valutersanno le ordinate delle linee suddette e si prenderanno due volte da sopra in sotto, a computare da essa retta orizzontale.

52. Perchè un pezzo tutto ugualmente largo, *posato coi suoi estremi su due appoggi orizzontali*, sia di uguale resistenza, debbe avere per sezioni longitudinali le curve seguenti.

Se caricato uniformemente da pesi, e nel mezzo da un peso addizionale:

Porzioni uguali e simmetriche di due ellissi: per la metà a destra col centro a sinistra, e per la metà a sinistra col centro a destra della verticale di mezzo; e ciascuno tanto distante da questa, per quanto è il rapporto del peso addizionale, al doppio di quello che deve gravitare su ciascuna unità di lunghezza della distanza degli appoggi.

La equazione di ciascuna ellisse è

$$4R'bx^2 + 3\pi x_1^2 = \frac{3}{b} \left[\pi c^2 + P \left(2c + \frac{P}{\pi} \right) \right].$$

L' altezza massima è data dalla

$$2a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3(\pi c + 2P)c}{R'b}}.$$

Se caricato da peso così grande, che il peso proprio del pezzo possa aversi come trascurabile rispetto ad esso: se ne pende dal mezzo,

Porzioni uguali e simmetriche di due parabole, coi vertici ai luoghi degli appoggi, e di parametro i tre quarti del peso aggravante, diviso pel prodotto della larghezza del pezzo nello sforzo massimo, cui si vuole soggiacciano le sue fibre.

La equazione è

$$4R'bx^2 = 3Px_1.$$

e la più grande altezza del pezzo è data dalla

$$2a = \sqrt{\frac{3Pc}{2R'b}}$$

se il peso ne pende da un punto distante per n dal mezzo.

* *Porzioni di due parabole coi vertici sulli appoggi, dirette*

in senso contrario, e di ordinata comune nella sezione onde pender deve il peso; e di equazioni

$$\frac{2R'b}{3P} \alpha^2 = \frac{c}{2} \left(1 - \frac{4n^2}{c^2} \right) - \left(1 - \frac{2n}{c} \right) x$$

$$\frac{2R'b}{3P} \alpha^2 = \frac{c}{2} \left(1 - \frac{4n^2}{c^2} \right) - \left(1 + \frac{2n}{c} \right) x.$$

Se caricato solo di pesi uniformemente distribuiti:

Ellisse, col centro equidistante dalli appoggi: di asse maggiore la distanza loro, ed asse minore la metà di essa medesima distanza nella radice quadrata del triplo del peso su ciascuna unità di lunghezza, diviso per la larghezza costante del pezzo nello sforzo massimo, cui si vuole soggiacciono le sue fibre.

La equazione è

$$4R't\alpha^2 + 3nx^2 = \frac{3}{4}nc^2;$$

e la più grande altezza del pezzo è data dalla

$$2\alpha = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{3n}{R'b}}.$$

N. B. Se fosse necessità che il pezzo si terminasse superiormente in un piano orizzontale; cosicchè la sua sezione longitudinale dovesse terminarsi superiormente da una retta, si valuteranno le ordinate delle linee suddette e si prenderanno due volte da sopra in sotto a computare da essa retta orizzontale.

* 33. Se per sopra un solido posato su due appoggi orizzontali, debba andare camminando un peso grande rispetto al peso del solido, così che questo sia trascurabile rispetto a quello; e vogliasi così costruire, che in ogni posizione del peso le fibre della sezione ove esso giace, le più lontane dalla superficie neutrale, siano premute nè più nè meno di una certa misura, dovrà farsene la sezione longitudinale secondo una *ellisse*: di asse orizzontale la distanza dei sostegni, e di asse verticale la radice dei tre quarti del prodotto dei rapporti della lunghezza alla larghezza del pezzo, e del peso mobile allo sforzo maggiore delle fibre nel luogo ove il peso si trova.

La equazione è

$$4R'bca^2 + 12Pn^2 = 3Pc^2$$

ove la n e la a sono le coordinate variabili; e la massima

altezza di questo pezzo è data dalla

$$2a = \sqrt{\frac{3Pc}{R'b}}.$$

54. Si usano pezzi di ugual resistenza, quando i pesi aggravanti sono tanto grandi, da aversi come trascurabile rispetto ad essi il peso proprio del solido. Ma se ciò non fosse, pur se ne conformeranno i profili, come è detto di sopra, supponendo essere aggravato il solido di un peso uniformemente distribuito, pari a quello che sull'unità lineare avrebbe il solido se fosse prismatico di sezione uguale alla più grande sua sezione.

ESEMPIO 1.º

237. Su di un compreso di muramento largo palmi 24 debba farsi un solaio tutto di legname, con travi rotondi di castagno selvatico del diametro di onces 12, e della dovuta lunghezza; e così che la parte soprastante possa destinarsi a granile.

Si domanda a che distanza debbono porsi i travi, perchè resistano al carico senza che se ne alteri la elasticità?

238. I travi potendosi incastrare nei muri che debbono servirgli di sostegno, ricorreremo alla terza formola del primo caso del 47.^{mo} principio, la quale è

$$\frac{6R'}{5} \cdot \frac{d^3}{c^2} = \pi.$$

Nella quale però per π deve porsi il massimo peso di che può essere caricata ciascuna trave.

239. Quando si riempie un granile, il granvi si accumula in uno strato presso a poco dappertutto di uguale altezza; e che al massimo può essere di palmi 6. Ma un palmo cubo di grano di buona qualità suole pesare circa rotola 15. Dunque su ciascun palmo quadrato del solaio di un granile può gravitare al massimo il peso di rotola 90.

Se dunque chiamiamo x la distanza in onces, da determinarsi, di due travi contigui, sarà

$$n = 9x;$$

Teor. delle Res.

perciocchè di rotola 9 riesce il peso gravitante su ciascuna aia di un palmo per un'oncia.

Quindi la formola di sopra si trasformerà in

$$\frac{6R'}{5} \cdot \frac{d^3}{c^2} = 9x$$

ove $d=12$ once

$c=24$ palmi.

E pel valore di R' , frazione del modulo di resistenza rispettiva, la quale misura lo sforzo delle fibre le più tese o le più compresse, faremo

$R'=85$, numero inferiore al limite massimo del valore di R' dato dalla tav. a pag. 181 pel castagno selvatico; e maggiore del medio tra i limiti; considerando che se per una parte, il granile non sarà sempre pieno colla massima altezza del grano, per l'altra gl' incastri non possono essere perfetti.

240. Sostituiti i predetti valori nella equazione determinatrice della x , e risolutala rispetto a questa quantità, avremo

$$x = \frac{6 \cdot 85 \cdot (12)^3}{5 \cdot 9 \cdot (24)^2} = \frac{2 \cdot 17 \cdot (12)(12)^2}{3 \cdot (2)^2(12)^2} = 34.$$

Dunque i travi potranno al massimo essere messi alla distanza, tra li assi, di once 34: e per maggior sicurezza li metteremo (fig. 57) distanti l' uno dall' altro, tra vivo e vivo, per palmi 2.

* 241. Coi dati dell' attuale problema i travi non potrebbero mettersi (240) a distanza maggiore di once 34 tra i loro assi. Ed è evidente che ove la distanza delle mura andasse crescendo, e quindi anche la lunghezza dei travi, la più grande distanza, alla quale potrebbero porsi, anderebbe scemando; onde arriverebbersi ad un punto (fig. 58) ove i travi dovrebbero porre a contatto. Or vediamo, quale sarà la distanza dei muri per la quale i travi dovranno porsi a contatto; ed oltrepassata la quale non potrebbe più farsi un solaio da granile con quelli travi? ammeno che non si corroborino con opportune armature.

* 242. Per vedere ciò, consideriamo, che quando i travi sono a contatto i loro assi saranno distanti once 12; onde sarà $x=12$.

Facciamo dunque nella equazione del n.º 239

$$\frac{6R'}{5} \cdot \frac{d^3}{c^2} = 9x,$$

$$R' = 85,$$

$$d = 12,$$

$$x = 12;$$

e risolviamola rispetto a c .

Ottenghiamo

$$c = 12 \sqrt{\frac{6 \cdot 85}{5 \cdot 9}} = 12 \sqrt{\frac{2 \cdot 17}{3}} = 4 \sqrt{102}.$$

E prossimamente

$$c = 40 \text{ palmi.}$$

Onde si conchiude, che con travi del diametro di once 12, non si potrebbe costruire un solaio da granile di tratta maggiore di palmi 40: anzi sarà bene non mai arrivare a questo limite, mentre quanto più cresce la tratta, più si fanno maggiori le pressioni contro le pareti degli incastri; e quindi tanto meno possono questi aversi come invincibili.

ESEMPIO 2.º

243. Un ingegnere, su di un fiume torrente, debba costruire un ponte da servire per uso di strada ferrata; e tali sieno le circostanze locali che di poco possa elevarsi sul fondo del torrente il piano stradale: e però l'ingegnere, essendo costretto a dover fare il ponte *a travata e senza potervi usare armature*, pensa farlo a semplici travate tubulari rettangole di lamine di ferro di 0,6 di oncia; alta ciascuna trave 46 once e larga 23. Vuol vedere quale ne potrebb'essere la tratta di ciascuna travata, onde fissarne il numero.

Si domanda, come potrà egli determinare tale tratta?

244. La chiesta determinazione si farà per la seconda equazione del secondo caso del 48.º principio; perciocchè la locomotiva col suo treno, è come un peso che si riporta sulle travi di ferro che sostengono le guide, e che deve camminarvi per sopra dall'uno all'altro capo.

E l'incognita sarà la c distanza delli appoggi. Però risolvendo la detta equazione rispetto a c , avremo

$$c = \frac{2R' (A^3 B - a^3 b)}{3P A}.$$

E questa trattasi di calcolare.

245. Il *palco del ponte* dovendo essere percorso da un intero treno della strada ferrata, il peso P sarà mobile per sul ponte; e comunque in vero il peso del treno non si possa avere come concentrato nel suo centro di gravità, noi pure così supporremo, tornando ciò a vantaggio della stabilità, ed anche perchè il peso maggiore, che così viene a considerarsi come accumulato in un punto, varrà per quel tremito, che suole produrre il cammino di tanti pesanti carri che si succedono.

Quindi sarà come se un peso di 160 000 rotoli dovesse camminare per sul ponte; e perciò per su un binario di guide di ferro (a).

Supponendo dunque che ogni guida sia posata sur una trave tubulare, il peso che dovrà muoversi per su ciascuna trave sarà di 80 000 rotoli.

Il tubo essendo di ferro laminato prenderemo per R' il valore dato dalla tavola a pag. 182 pel ferro malleabile di piccola sezione, e per la natura del lavoro necessario a comporre il tubo (207), gli assegneremo un valore un poco inferiore al medio tra i due suoi limiti, minimo e massimo; ossia gli daremo il valore di 1600 rotoli, essendo qui le dimensioni trasversali in once, e volendo le longitudinali in palmi.

Dobbiamo dunque porre nella equazione soprascritta

$$A = 46^{\circ}.$$

$$B = 23^{\circ}.$$

$$a = 46^{\circ} - 1,2 = 44^{\circ},8.$$

$$b = 23^{\circ} - 1,2 = 21^{\circ},8.$$

$$P = 80\,000r.$$

$$R' = 1\,600r.$$

246. Fatte le sostituzioni nella formola precedente,

(a) Ogni locomotiva suol essere ordinariamente del peso di 18 tons (misura inglese equivalente a cantata 11,4) pari a 20320 rotoli; ed il massimo peso che può trascinare per su un binario di guide di ferro, è di 122 tons, ossia di rotoli 139080, che uniti ai precedenti fanno rotoli 159000: onde in numeri rotondi, come sopra, 1600 cantata.

risulta

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{2 \cdot 1600}{3.80000} \left(\frac{(46)^3 (23) - (44,8)^3 (21,8)}{46} \right) \\
 &= \frac{1}{150,23} [(97336)(23) - (89915,392)(21,8)] \\
 &= \frac{278572}{3450} = 80,76.
 \end{aligned}$$

Dunque l'ingegnere, con travi tubulari delle assunte dimensioni, potrà ottimamente fare travate della portata di palmi 80: anzi potrebbe farle forse anche della doppia lunghezza. Perciocchè un intero treno di strada ferrata (pel quale corrisponde il detto peso di 160 000 rotoli) ha una lunghezza di oltre li 80 palmi; onde in vero un tal peso non sarà raccolto in un punto e poi mobile per su la trave; ma sarà quasi come uniformemente distribuito per tutta la sua lunghezza; e pel 27^{mo} principio sappiamo che il peso uniformemente distribuito può essere doppio di quello che sarebbe raccolto nel suo mezzo, o se il peso fosse lo stesso, la trave potrebbe avere doppia lunghezza. Ma poichè la macchina non potrà essere di peso uguale a ciascun carro carico, nè i carri carichi sono tutti uguali in peso; conchiuderemo.

Dunque l'ingegnere potrà sicuramente fare (ben facendo costruire le travi) la tratta di ciascuna travata di pal. 100.

ESEMPIO 3.°

247. Un ponte analogo al precedente, cioè pure di pal. 100 di tratta, e che debba essere percorso da un peso di 160 000 rotoli, voglia farsi con travi di ferro fuso rettangoli a rinflanchi uguali in cima ed in base, e così che l'altezza della sezione sia uguale alla sua larghezza totale e le sue parti grosse un decimo dell'altezza.

Si dimanda, quanto dovrà essere alta ciascuna trave?

248. Per questo caso dovremo aver ricorso alla seconda formola del quarantacinquesimo principio, nella quale la incognita sarà la a .

E quindi dovrà essere

$$a = \sqrt[3]{\frac{1875 P c}{674 R'}}$$

249. Supponendo anche qui che ciascuna trave sostenga una guida di ferro della strada; e considerando che se da una parte il peso è passeggero per sul ponte, nè veramente raccolto tutto in un punto, dall'altra parte il movimento del treno deve indurvi una certa vibrazione; e d'altronde un pezzo di ferro fuso, come quello di che si tratta, non può veramente riuscire di ottima qualità; faremo

$P=80000$ rotoli, metà del peso totale,

$R'=430$ rotoli, poco al di sotto del medio tra il minimo e massimo valore competente al ferro fuso di qualità media, come dalla tav. a pag. 182,

$e=100$.

250. Fatte le sostituzioni, risulta

$$a = \sqrt[3]{\frac{1875 \cdot 80000 \cdot 100}{674 \cdot 430}} = \sqrt[3]{\frac{1875 \cdot 20000 \cdot 100}{337 \cdot 215}} = \sqrt[3]{\frac{375000000}{72455}}$$

ossia prossimamente in più

$$a = \sqrt[3]{51743}. \text{ Onde può farsi } a=37,3.$$

Dunque ciascuna trave dovrebbe avere l'altezza, e quindi anche la larghezza di once 37,5; cioè quasi nove once meno delle travi assunte nell'esempio precedente (243): onde il ponte verrebbe più sfogato colle determinate travi di ferro fuso che non colle assunte tubulari di lamine. Ma con queste il ponte riuscirà più leggero, che con quelle. Quindi la preferenza dipenderà dai riguardi da aversi ai metodi di costruzione, sì in ordine al modo di comporre i lunghi travi e metterli in opera, che in ordine alla natura del suolo su cui anderà fondato l'edificio.

ESEMPIO 4.°

251. È noto che li eserciti nel traghettare i fiumi sogliono fare dei ponti provvisorii; o galleggianti, o posati sul fondo del fiume per via di cavalletti; e che i materiali per quest'ultima sorta di ponti non sempre possono portare con loro; onde spesso debbono tali ponti costruirsi con materiali che si trovano sui luoghi. Or supponiamo che, per buona

ventura, in magazzini non molto lontani dal luogo ove va costruito il ponte, l'ingegnere trovi dei travicelli di larice lunghi circa pal. 39; ma della tenue riquadratura di once 6. Sicchè gli vien dubbio se possa oppur nò porre i cavalletti di sostegno alla più grande distanza che gli offrirebbero le lunghezze dei pezzi; onde vuol vedere *quale sarebbe la più grande distanza a cui potrebbe porre i cavalletti, onde il ponte potesse ben servire, e con sicurezza al suo officio, anche quando i travicelli fossero alla distanza di soli pal. 2 tra li assi.*

Vediamo, come l'ingegnere, per assicurarsi di questo, dovrebbe fare i suoi calcoli.

252. Un ponte, come quello di che si tratta, è il più opportuno al suo scopo, quando può essere transitato dall'esercito nel minor tempo possibile. Dunque l'ingegnere dovrà supporlo tutto ingombro della più grande calca; e della più pesante sulla totalità del ponte.

Ora è risaputo che niuna calca fa nella totalità peso maggiore di un corpo d'infanteria in colonna serrata; perciocchè, comunque ciascun cavallo montato pesi più che un fante armato, ed un pezzo di artiglieria col suo treno, più del cavallo e del fante; pure l'area che un fante può occupare è sì piccola rispetto a quella che deve occupare un cavallo, od un carro di artiglieria, che nella totalità è assai maggiore il peso della infanteria gravitante su una data area, per esempio sur una canna quadrata, quando procede a colonna serrata.

Secondo che ritengono i meccanici e costruttori, un uomo di statura ordinaria può aversi pesare, l'un per l'altro rotola 79, ed in piedi poterne capire 42 sur una canna quadrata. Ma tra arma e bagagli un fante può portare ad un circa le 30 rotola.

Dunque il peso più grande, che pel passaggio dell'esercito, può sostenere il ponte che l'ingegnere deve fare, sarà di rotoli $(79 + 30)42 = 4378$ per canna quadrata, e che per maggior sicurezza assumeremo di rot. 4600, lo che equivale a rotoli 46 per ogni palmo quadrato.

253. Si è detto (251) che l'ingegnere penserebbe avvicinare i travicelli alla distanza di soli pal.2, da asse ad asse.

Dunque ciascun travicello si troverà nel caso di un pezzo di larice di sezione quadrata di lato once 6, e caricato di un peso di rotoli 92 uniformemente distribuito.

Dunque dovrà aversi ricorso alla seconda formola del primo caso del principio 42.^{mo}; nella quale vi sarà c l'incognita; ed $a=b=6$ once

$$n=92 \text{ rotoli}$$

$R'=54$ rotoli, essendosi preso dalla tav. a pag. 181, il limite massimo dei valori assegnabili ad R' pel pino larice, dovendo il ponte di che si tratta servire al rapido passaggio dell'esercito che potrà durare solo per alcuni giorni.

E pertanto i detti valori, dovranno sostituirsi nella

$$c=2\sqrt{\frac{R'a^3}{3n}}.$$

254. Fatte le sostituzioni risulta

$$c=2\sqrt{\frac{54 \cdot 216}{3 \cdot 92}}=2\sqrt{\frac{11664}{276}};$$

e prossimamente

$$c=2\sqrt{42,26}=2(6,5).$$

Dunque l'ingegnere non dovrebbe porre i cavalletti a distanza maggiore di palmi 13.

255. Se la natura del fiume fosse tale da non potersi stabilire i cavalletti di sostegno a tanta breve distanza, potrebbe l'ingegnere, avendone i mezzi, accoppiare i travicelli a due a due l'uno sull'altro, e di ciascuna coppia formare un sol trave di altezza doppia della larghezza. Ed allora potrebbe la distanza essere anche di 26 palmi, doppia della precedente. Perciocchè qui le lunghezze c variano, come le altezze a .

Ma la trave non essendo allora di un sol pezzo, non starebbero davvero nel caso della teoria; essendo quivi l'aderenza delle fibre omogenea, laddove nel caso dei travicelli accoppiati l'aderenza tra loro difficilmente può essere eguale alla naturale. Onde dovrebbe farsi R' anche al di sotto del

limite minimo. E però in tal caso il prudente ingegnere farebbe bene a non portare la distanza dei cavalletti oltre i palmi 20. Dallo che si vede, che, potendolo, dovrebbe preferire la distanza di pal. 13. Ed osserveremo che i travicelli essendo di circa palmi 39, anche più robusto risulterà il ponte mettendo i cavalletti alla distanza di pal. 13 tra loro; perciocchè ciascun travicello poserà su quattro cavalletti, e la porzione di mezzo, sarà veramente, quasi, come incastrata nelli appoggi, anzi che posata sur essi; e nei pezzi incastrati la resistenza è maggiore che nei pezzi semplicemente posati sulli appoggi, come è noto dal 28^{mo} principio.

ESEMPIO 5.^o

256. Debba fare il modello pei bilancieri di una macchina a vapore a bilancieri laterali; il di cui stantuffo sia del diametro di once 50, e sul quale debba agire il vapore per generazione, colla pressione di rotoli 14 per ogni oncia quadrata.

Per la regolarità del moto, assunto ciascun braccio del bilanciere di pal. 18; ed assunta la sua larghezza, ovvero spessore del metallo, di once 2,5 (a); si domanda l'altezza del bilanciere, e la forma dei modelli, per poi farsi di ferro fuso, e propriamente di ghisa dolce.

257. Innanzi tutto calcoliamo la forza massima che può agire all'estremo de' bilancieri.

Lo stantuffo del cilindro ricevitore della macchina, essendo del diametro di once 50, la sua area sarà di once quadre

$$\pi \left(\frac{50}{2} \right)^2 = 1963,5.$$

Ma su ogni oncia quadrata deve farsi la pressione di rotola 14.

Dunque la pressione totale sullo stantuffo sarà di rotoli

$$14(1963,5) = 27489 \text{ rotoli.}$$

E questa è la forza totale che deve agire all'estremo della coppia di bilancieri.

(a) Questo spessore è frequentemente adottato nelle migliori macchine di tal natura.

Quindi sur ogni uno di essi, agirà la forza di rotoli

$$\frac{27489}{2} = 13744,5.$$

258. Per la natura della macchina; ed anche visto che i bilancieri vogliansi fare di ferro fuso, sarà bene conformarli secondo solidi di egual resistenza.

E potendosi ciascun braccio del bilanciare considerare come un solido incastrato da un estremo, e dall' altro estremo caricato da un peso pari a 13744,5 rotoli, ci avvalremo del 51.^{mo} principio: e proprio del 2.^o caso.

Avremo per l'altezza in centro di ciascun bilanciare

$$2\alpha = 2\sqrt{\frac{3 \cdot Pc}{2 \cdot R'b}} :$$

ove dovremo fare

$$c = 18 \text{ palmi}$$

$$b = 2,5 \text{ onces}$$

$P = 13744,5$ rotoli, secondo il calcolo precedente (257).
 $R' = 500$, come risulta dalla tav. a pag. 182, considerando che la macchina non sta in azione continua; ma non pertanto può esserlo per un tempo abbastanza lungo.

Quindi risulta

$$\alpha = \sqrt{\frac{3 \cdot 18 \cdot 13744,5}{2 \cdot 2,5 \cdot 500}} = \sqrt{\frac{742203}{2500}} ;$$

e prossimamente in più

$$\alpha = \sqrt{297} = 17,2337.$$

Dunque l'altezza di ciascun bilanciare in centro si farà di onces 34,5, poco più del doppio del precedente valore (a).

259. Pel principio stesso 51.^{mo}, il profilo longitudinale si farà di due porzioni di parabole accoppiate; il parametro di ciascuna delle quali sarà

$$\frac{3P}{2R'b} = \frac{3(13744,5)}{2 \cdot 500 \cdot 2,5} = \frac{41233,5}{2500} = 16,4934.$$

Quindi la equazione della parabola sarà

$$y^2 = 16,4934 \cdot x.$$

(a) Questo risultato pur si accorda colle dimensioni precedenti, come sogliono essere adottate nelle macchine della specie che si considera.

260. Dunque presa una tavola (*fig. 59*) poco più grossa di once $2\frac{1}{2}$, larga once $34\frac{1}{2}$, e lunga palmi 18, vi si tirerà una retta che la divida per lungo in due parti; e su questa retta si prenderanno diciotto parti, ciascuna di un palmo; e da ciascun punto di divisione si alzeranno le perpendicolari ad essa retta: sopra ognuna delle quali si taglieranno delle parti, ciascuna uguale a tante once, per quante unità si conterranno nei valori di

$$y = 4\sqrt{x}$$

(poco inferiore al rigoroso risultante dalla equazione precedente), quando in vece di x , vi si pone successivamente 1, 2, 3..... sino a 18: per fare la qual cosa per maggior comodo si farà la seguente tavoletta:

VALORI di x .	VALORI corrispon- denti di y .	VALORI di x .	VALORI corrispon- denti di y .	VALORI di x .	VALORI corrispon- denti di y .
1	4,00	7	10,58	13	14,42
2	5,66	8	11,31	14	14,97
3	6,93	9	12,00	15	15,49
4	8,00	10	12,65	16	16,00
5	8,94	11	13,27	17	16,49
6	9,80	12	13,86	18	16,97

Tagliate queste parti sulle dette perpendicolari tanto da sopra che da sotto, e condotta una continua linea passante per tutti li estremi di tali perpendicolari, così determinati; si taglierà quindi la tavola secondo essa linea, e così si avrà il chiesto modello pel semi bilanciere.

Non pertanto, perchè non si possa torcere, si orla di una specie di risalto (*fig. 60*), che venendo anche nel pezzo di ferro, ne facilita il getto, ed il corrobora ad un tempo: e però abbiamo potuto (260), per comodo di calcolo, prendere la y minore di quella che sarebbe stata data dalla equazione del n.º 259. Se ne aggiustano anche gli estremi per attaccarvi l'asta connettitrice.

ESEMPIO 6.^o

261. Voglia farsi di querce ischia il *vetto* di un *maneggio* lungo palmi 15, da attaccarvi due cavalli. Si domanda di quanto debba esserne la *riquadratura* facendosi di *sezione quadrata*?

262. Il *vetto* può considerarsi, come un pezzo prismatico incastrato da un estremo, e carico di un peso equivalente alla forza di due cavalli dall'altro estremo; perciocchè in sulle prime il *vetto* si flette, e quindi fattosi equilibrio tra le forze intrinseche sviluppatesi e la forza dei due cavalli, il moto si trasmette *all'albero verticale* in cui è incastrato. Ricorreremo dunque al principio 42.^{mo}, e ci serviremo della prima formola del secondo caso, ponendovi $a=b$; e risolvendola rispetto ad a , essendo a ciò che si cerca.

Avremo dunque

$$a = \sqrt[3]{\frac{6Pc}{R'}}$$

263. Nel primo spostarsi del *maneggio* dalla quiete, i cavalli dovranno vincere l'inerzia di tutta la macchina, e la loro velocità sarà quasi come nulla. Onde faranno il più grande sforzo di che sono capaci. Ma la *forza assoluta* di un cavallo varia dai 337, ai 560 rotoli.

Dunque possiamo supporre lo sforzo di ogni uno dei due cavalli di 500 rotoli.

264. Questo grande sforzo non si esercita che per istanti ogui volta che il *maneggio* si mette in moto a cominciare dalla quiete. Dunque potremo prendere per R' il limite massimo della frazione che può essere del modulo di resistenza rispettiva: ed il prenderemo però di rotola 86, come vien dato dalla tavola a pag. 181 per la querce ischia.

265. Nella

$$a = \sqrt[3]{\frac{6Pc}{R'}}$$

poniamo dunque

$P = 1000$ rotoli

$R' = 86$ rotoli

$c = 13$ palmi

Risulta

$$a = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1000 \cdot 13}{86}} = 10 \sqrt[3]{\frac{90}{86}} = \frac{10}{86} \sqrt[3]{7740};$$

e quindi prossimamente in più

$$a = \frac{880}{86} = 10,23256.$$

Dunque il vette del maneggio si farà colla riquadratura di once $10\frac{1}{4}$.

266. Misuriamo la freccia di curvatura che prenderebbe il vette, per lo sforzo che vi fanno su i cavalli per metterlo in moto.

Dalla prima formola del 2.^o caso del 14.^{mo} principio, facendo $a = b$, abbiamo

$$h_1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{APc^3}{a^4};$$

ove dovremo porre

$a = 10,25$ once

$c = 13$ palmi

$P = 1000$ rotoli

$E = 939$ rotoli, che è il valore del modulo di elasticità dato dalla tavola a pag. 175 per la querce comune, mentre non v'è proprio quello per la querce ischia.

Risulta

$$h_1 = \frac{4 \cdot 1000 (13)^3}{939 (10,25)^4} = \frac{4000 \cdot 3373}{939 (11038,13)} = \frac{1350000000}{1036480407}.$$

Onde prossimamente

$h_1 = 1,3\frac{1}{2}$ once.

Dunque la freccia di curvatura richiesta sarà di 0,13 palmi.

267. Se vorremo quella parte della fatica meccanica dei cavalli che dicesi perduta, perchè si spende senza effetto utile, da che i cavalli cominciano ad agire sul vette, fin tanto che lo sforzo che fanno non comincia a tras-

mettersi all' albero verticale del maneggio, onde poi questo si mette in moto, dovremo moltiplicare la trovata freccia di flessione del vette per lo sforzo che vi fanno su i cavalli.

Onde sarà la fatica meccanica perduta

$$(0,13)(1000) = 130.$$

** Dunque, a causa della non rigidezza del vette, si spende senza produrre effetto utile nella macchina una quantità di azione equivalente ad un rotolo elevato a centotrenta palmi di altezza.*

E di qui si vede che sarebbe più utile fare il vette di querce di Danzica, ove potesse aversi, che dopo il Teak è il legno più rigido, anzi che di querce Ischia; perciocchè allora, risultando minore la freccia di curvatura, minore sarebbe la fatica meccanica perduta. Ma vuolsi avvertire che un' assoluta rigidezza (che la provvida natura non ha voluto concedere) sarebbe nociva anzi che utile; mentre la necessaria trasmissione per gradi delle forze, ha luogo appunto per la elasticità della materia.



CAPO IV.

DELLA RESISTENZA ALLA TORSIONE.

268. Sia il pezzo prismatico (*fig. 6f*) orizzontale $CKDEG'G$, orizzontalmente ed invincibilmente incastrato dall'uno CKD dei suoi estremi; così che quivi le sue fibre si mantengano sempre orizzontali ed immobili. Dall'altro suo estremo libero $EG'G$, per mezzo del braccio rigido HD , agiscavi su il peso P .

Il pezzo essendo invincibilmente incastrato nell'estremo DKC , non potrà che torcersi, avvolgendosi a spira le fibre longitudinali ch'erano diritte, e scendendo il peso P : così che la fibra CG , giacente sulla faccia del pezzo, si porterà in $CM'G'$, e l'altra FB , giacente nel suo interno alla distanza $OF=HB$ dall'asse, si porterà in $FA'B'$; ed il peso P , si porterà in P' , passando il braccio HD , dalla sua primitiva posizione, nell'altra HD' . E dopo essersi torto alquanto, può avvenire, come avviene di fatto, che non si torce ulteriormente; e che quindi tutte le sue fibre ed il peso stesso si fermano nella nuova posizione. Ed è evidente, che ciò non può succedere, che sviluppandosi nelle fibre del pezzo delle resistenze o forze intrinseche, che col loro momento neutralizzano l'effetto del peso P .

Potrebbe anche avvenire, che tanto grande fosse il peso P , da non poterne l'effetto essere neutralizzato dalle resistenze sviluppatesi; in guisa che, sligatosene le fibre, ovvero separatesene le molecole componenti, il pezzo si rompa.

269. Quando il peso, od altra forza in sua vece, è tale che il pezzo non appena torto, non si torce ulteriormente, e tanto le sue fibre, quanto il peso, prendono le nuove posizioni assai vicine alle prime, dicesi mettersene a *cimento la elasticità di torsione*.

Quando torto il pezzo, pur si arrestano in nuova acquistata posizione tanto le sue fibre quanto il peso, ma dopo che il pezzo si è tanto torto, che se per poco si torcesse

di più, si romperebbe, dicesi mettersene a cimento la resistenza alla rottura per torsione.

270. Nel primo di questi due casi, al cessare di agire della forza suole *ordinariamente avvenire*, che le sue fibre ritornano alla positura primiera; e ciò avvenendo dicesi che la *elasticità di torsione è conservata*. Quando avviene in vece che le fibre del pezzo, non proprio si rimettono al luogo primiero, dicesi *alterata la elasticità di torsione*. E quando cessata l'azione delle forze estrinseche, le fibre si rimangono nella presa posizione, lo che suole avvenire nel caso prossimo alla rottura, la *elasticità di torsione dicesi perduta*.

271. Pertanto (269) nel presente Capo considereremo:

1.º Il caso in cui è mess' a cimento la *elasticità di torsione*.

2.º Il caso in cui è mess' a cimento la *resistenza alla rottura per torsione*.

3.º Il modo di applicare le cose che saranno state dette nei due precedenti articoli.

4.º Riepilogheremo ed applicheremo a degli esempi.

ARTICOLO I.

Caso in cui è mess' a cimento la elasticità di torsione.

272. Supponiamo (fig. 61) che il pezzo orizzontale $DKCG'E$, invincibilmente ed orizzontalmente incastrato (268) nell'estremo DKC , per l'azione del peso P , che non ne incontra l'asse OH , ma che vi agisce su per mezzo del braccio HD invariabilmente con esso connesso, si torci tanto, che il braccio rigido HD passi in HD' , ove si ferma; e che tutt' i punti della sezione estrema li quali sono nel braccio HD pur vadano a porsi nella nuova posizione HD' di questo: e che così ogni punto della sezione estrema $GG'E$, percorri un arco circolare simile a quelli percorsi dai punti del braccio HD ; e che perciò sarà misurato dal prodotto dell'angolo DAD' nella distanza dell'individuato punto dal centro H della sezione. Così, se sia θ il valore dell'angolo DAD' , che dicesi *angolo di torsione*, ed r la distanza HB , di un' in-

dividuato punto qualunque della sezione $GG'E$ dal suo centro H ; sarà $r\theta$ lo spazio circolare percorso da esso individuato punto: e se assumeremo la r variabile, esprimerà $r\theta$, non l'arco circolare percorso da quello individuato punto B , ma da un punto qualunque della sezione; ovvero dall'estremo di una fibra qualunque del pezzo: e la quale prima di torcersi è parallela all'asse OH .

Intanto se la molecola estrema di ciascuna fibra, percorre lo spazio circolare $r\theta$, è forza ch'essa agisca sulla molecola contigua che pure percorrerà un certo spazio circolare; e parimenti questa agirà sulla contigua; e così, da molecola a molecola, il movimento si trasmetterà per tutta la fibra; ma non si potrà nella molecola che giace nell'estremo opposto, cioè nella sezione CKD , essendo questa orizzontalmente ed invincibilmente incastrata (268). Ed è evidente, che li spazi percorsi dalle diverse molecole di una medesima fibra saranno tanto minori, per quanto più si allontanano dalla sezione estrema libera $GG'E$, ossia per quanto più si avvicinano alla fissa CKD . Così che se la fibra giacente secondo CG , nel torcersi del pezzo, si dispone secondo $CM'm'G'$, dev'essere arco $GG' > \text{arco } mm' > \text{arco } MM'$: e se la fibra interna FB , nel torcersi del pezzo, si porta in $FA'a'B'$, debb'essere parimenti arco $BB' > \text{arco } aa' > \text{arco } AA'$.

E se supporremo (la quale ipotesi semplicissima è generalmente adottata) che lo spazio percorso da ciascuna molecola di una medesima fibra, sia proporzionale alla sua distanza dall'incastro, potremo assumere a misura dello spostamento delle molecole di ciascuna fibra quello che per un dato angolo di torsione DHD' prenderebbe un'estremo rispetto all'altro, di una stessa porzione di fibra uguale all'unità.

273. Siano dunque le due sezioni $MM'N$, $mm'n$ distanti tra loro per l'unità: e mentre pel torcimento del pezzo l'estremo A della porzione Aa della fibra $FAaB$ siasi portato in A' , l'altro suo estremo a siasi trasportato in a' . Tirando la $A'a'$ parallela alla Mm , si fa chiaro che sarà l'archetto aa' la misura dello spostamento di tutte le molecole

Teor. delle Res.

della fibra qualunque $FAaB$ distante per OF dall'asse OH del pezzo, che pel torcimento s'è disposta in $FA'a'B'$.

Ma per la proporzionalità (272) delli spazi percorsi dalle molecole di una medesima fibra alla distanza di ciascuna dall'incastro, si ha la proporzione

$$a'a : Mm :: BB' : GC,$$

che, chiamando c la distanza della direzione della forza P dall'incastro, la quale può qui prendersi per la lunghezza $GC = OH$ del pezzo, e sostituendovi ancora le denominazioni precedenti (272), si trasforma in

$$a'a : 1 :: \theta r : c.$$

Dunque la misura dello spostamento delle molecole di una fibra qualunque distante per r dall'asse del pezzo, sarà

$$(I) \quad a'a = \frac{\theta r}{c}.$$

274. Spostatesi le molecole della fibra di che si tratta per una tale misura; ed essendo le resistenze per tali spostamenti sviluppatesi che cospirano colle altre analoghe ad equilibrare il peso P ; *potremo assumere* tale resistenza proporzionale alla misura di esso spostamento.

Quindi chiamando G il rapporto o coefficiente di proporzionalità, la resistenza della fibra di che si tratta sarà

$$(II) \quad G \frac{\theta r}{c};$$

e se considereremo tante di tali fibre distanti per r dall'asse OH del pezzo, per quante ne sono su di un arco che misura l'angolo al centro uguale ad uno (resistenze che sono uguali, perchè uguali sono gli spostamenti che le producono), ed il quale arco è lungo r , la resistenza di tutte tali fibre sarà espressa da

$$(III) \quad G \frac{\theta r^2}{c}.$$

E quindi il momento di esse medesime resistenze o forze intrinseche, che tendono ad impedire la rotazione delle molecole di esse fibre intorno all'asse OH del pezzo, sarà

$$(IV) \quad G \frac{\theta r^3}{c}.$$

275. La precedente è la somma dei momenti delle resistenze opposte da quelle fibre che stanno su di un arco di circolo o meglio porzione di cilindro di raggio r e di lunghezza r .

Se vorremo la somma dei momenti delle resistenze sviluppate non solo da quelle fibre, ma da tutte le fibre del pezzo, dovremo, come è noto pei principii del calcolo sublime, trovare la primitiva della precedente funzione estendendola a tutte le fibre; ovvero a tutta la sezione del pezzo.

Per ciò fare riferiamo il perimetro della sezione del pezzo a coordinate polari, prendendo un diametro della sezione del pezzo come asse fisso, e la circonferenza di raggio uno descritta col centro della sezione per asse delle ascisse; e chiamiamo ω gli angoli, ed α i raggi vettori: esprimerà

$$(V) \quad \alpha = f(\omega).$$

la equazione del perimetro della sezione.

Integrando la funzione (IV) rispetto ad r , da zero ad α , ossia da zero a $f(\omega)$, abbracceremo tutte le fibre che sono su di un medesimo raggio vettore; e troverassi funzione della ω . Integrandola di nuovo, da zero a 2π , abbracceremo tutte le fibre. E però potremo esprimere la somma dei momenti delle resistenze sviluppate da tutte le fibre del pezzo a causa della torsione, dall' integrale doppio

$$(VI) \quad G \int_0^\theta \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^\alpha r^3 dr;$$

ovvero dall' equivalente

$$(VII) \quad \frac{G\theta}{4c} \int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4 d\omega.$$

276. Nella precedente espressione (VII), è θ l'angolo effettivo della torsione; e se si suppone che la somma dei momenti delle resistenze ch'essa esprime ritenga il medesimo valore, la θ sarà tanto più piccola, per quanto più il fattore

$$\frac{G}{4c} \int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4 d\omega$$

è grande: epperò quanto più questo fattore è grande tanto meno il pezzo potrà perdere la elasticità (270).

Questo fattore può avere perciò il nome di *momento di*

elasticità di torsione : e la G di modulo o coefficiente di elasticità di torsione.

277. Intanto è facile vedere dalla (VI) che ciò che moltiplica G , nel momento di elasticità, è il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse del pezzo.

Dunque il momento di elasticità di torsione è uguale al momento d'inerzia, nel modulo G .

278. Mentre si sviluppano le resistenze anzidette, (272) nelle fibre del pezzo, il peso P agisce col momento $P \times HD$; ossia, facendo $HD = D$, col momento

$$PD.$$

E se più fossero le forze agenti sul pezzo e colle loro direzioni su di un medesimo piano, agirebbero contemporaneamente coi momenti $PD, P_1D_1, P_2D_2 \dots$, la di cui somma possiamo esprimere con

$$(VIII) \quad \Sigma \cdot PD.$$

279. Le forze intrinseche, ovvero resistenze si sviluppano a causa dell'azione de' pesi che torcono il pezzo; ed è per esse resistenze, che i pesi cessano di scendere, e le fibre si fermano nella nuova loro posizione dovuta alla torsione.

Dunque, nel caso della fermata, essendo impedito ogni moto di rotazione intorno all'asse OH del pezzo, dovrà esservi equilibrio; epperò dovrà essere la somma dei momenti di rotazione delle resistenze, espressa dalla (VII), uguale alla somma dei momenti di rotazione dei pesi ovvero delle forze (278) espressa dalla (VIII).

Dunque avrà luogo la equazione

$$(IX) \quad \frac{G\theta}{4c} \int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4 = \Sigma \cdot PD.$$

280. Dalla precedente equazione può dedursi il valore dell'angolo di torsione θ . E risulta espresso da

$$(X) \quad \theta = \frac{4c}{G} \cdot \frac{\Sigma \cdot PD}{\int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4} :$$

e se ne avrà la lunghezza, in parti dell'unità, moltiplicandone il valore pel rapporto $\frac{\pi}{180}$ della lunghezza della semicircon-

ferenza al numero dei gradi che contiene, ossia per 0,01745; che in molti casi pratici può prendersi uguale a 0,017.

Per la esposta teoria dunque date le dimensioni del pezzo, la forza o peso che vi agisce su, ed il braccio di leva col quale questo agisce, può determinarsi l'angolo di torsione; ed anche il cammino del punto di applicazione della forza.

281. Potrebbe anche vedersi quali dovrebbero essere le forze agenti su di un dato pezzo, di cui si metta a cimento la resistenza alla torsione, perchè l'angolo di torsione non oltrepassi una data misura; oppure viceversa, date le forze che agiscono sul pezzo, potrebbe vedersi quali dovrebbero esserne le dimensioni, perchè lo stesso si avverasse.

* 282. La (IX) vale se le forze, che agiscono sul pezzo, anno tutte, come s'è avvertito (278), la loro direzione su di un medesimo piano normale all'asse del pezzo. Non così se le forze agissero su piani di diverse sue sezioni.

Supponiamo essere P, P_1, P_2, P_3 le forze o pesi collo loro direzioni su sezioni diverse del pezzo, agenti rispettivamente coi bracci D, D_1, D_2, D_3 , e sia k la distanza dall'incastro, della sezione su cui agisce la forza P , e k_1, k_2, k_3 , rispettivamente le distanze successive della sezione su cui agisce la forza P_1 dall'altra su cui agisce la P , della sezione su cui agisce la forza P_2 dalla precedente, e così di seguito.

Potremo cominciare a prescindere (fig. 62) dalla porzione AA_3 del pezzo, considerandola come rigida; per lo che sarà come se tutti i pesi agissero sulla sezione A . E se su ogni sezione avremo forze analoghe alle $P, P_1, P_2 \dots$ avremo (279) la equazione

$$(XI) \quad \frac{G\theta}{4k} \int_0^{2\pi} [f(\alpha)]^2 d\alpha = \Sigma \cdot P D + \Sigma \cdot P_1 D_1 + \Sigma \cdot P_2 D_2 + \Sigma \cdot P_3 D_3.$$

Poi, per la equazione precedente, essendosi venuto a considerare il torcimento della porzione OA quando le fibre sue si arrestano; posta essa equazione, prescindendo ancora per un momento dalla porzione A_1A_3 che riterremo ancora come rigida; potremo considerare in secondo luogo la porzione AA_1 , come incastrata in A , e che sull'altra sezione A_1 agissero le forze P_1, P_2, P_3 ; e così chiamando θ_1 l'angolo di torsione della sezione A_1 rispetto alla sezione A ; avremo

$$(XII) \quad \frac{G\theta_1}{4k_1} \int_0^{2\pi} [f(\alpha)]^2 d\alpha = \Sigma \cdot P_1 D_1 + \Sigma \cdot P_2 D_2 + \Sigma \cdot P_3 D_3.$$

E similmente per la porzione A_1A_2 , chiamando θ_2 la torsione della sezione A_2 sulla A_1 ; avremo

$$(XIII) \quad \frac{G\theta_2}{4k_2} \int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4 d\omega = \Sigma \cdot P_2 D_2 + \Sigma \cdot P_3 D_3.$$

E per l'ultima porzione A_2A_3 , chiamando θ_3 la torsione della sezione A_3 rispetto alla A_2 ; avremo

$$(XIV) \quad \frac{G\theta_3}{4k_3} \int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4 d\omega = \Sigma \cdot P_3 D_3.$$

* 283. La torsione totale della sezione estrema l'otterremo prendendo dalle (XI), (XII), (XIII), (XIV) i valori delle torsioni parziali θ , θ_1 , θ_2 , θ_3 ; e quindi sommandole.

Così se in generale sieno le sezioni su cui agiscono le forze n di numero, avremo per la torsione totale dell'estremo del pezzo

$$(XV) \quad \begin{aligned} & \theta + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_n = \\ & \frac{4}{G \int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4 d\omega} \left\{ \begin{aligned} & k(\Sigma \cdot PD + \Sigma \cdot P_1 D_1 + \Sigma \cdot P_2 D_2 + \Sigma \cdot P_3 D_3 + \dots + \Sigma \cdot P_n D_n) \\ & + k_1(\Sigma \cdot P_1 D_1 + \Sigma \cdot P_2 D_2 + \Sigma \cdot P_3 D_3 + \dots + \Sigma \cdot P_n D_n) \\ & + k_2(\Sigma \cdot P_2 D_2 + \Sigma \cdot P_3 D_3 + \dots + \Sigma \cdot P_n D_n) \\ & + \vdots \\ & + k_n \Sigma \cdot (P_n D_n) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

* 284. Anzi da questa medesima formola si calcolerebbero tutti gli angoli di torsione successivi totali.

Ritenendo tutti i termini si avrà la torsione totale della sezione ultima A_n : omettendone l'ultimo termine nella grande parentesi si avrà la torsione sulla penultima sezione: omettendone due, si avrà quella sull'antipenultima; e così di seguito. In generale il numero dei polinomi conservati, esprimerà la sede della sezione sulla quale si ha la torsione a cominciare dalla prima dopo l'incastro.

Anche qui si avrà la lunghezza dell'arco che misura la torsione moltiplicando la formola precedente pel rapporto $\frac{\pi}{180}$.

* 285. Se i pesi agissero su sezioni tutte ugualmente distanti tra loro, per modo che sia $k=k_1=k_2=k_3\dots=k_n$ sarà

$$(XVI) \quad \begin{aligned} & \theta + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_n = \\ & \frac{4k}{G \int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4 d\omega} (\Sigma \cdot PD + 2\Sigma \cdot P_1 D_1 + 3\Sigma \cdot P_2 D_2 + 4\Sigma \cdot P_3 D_3 \\ & \quad + \dots + (n+1) \Sigma \cdot P_n D_n) \end{aligned}$$

286. In tutte le formole precedenti, se le forze saranno tutte da una stessa parte del pezzo, per esempio a sinistra,

i segni si conserveranno tutti positivi; se staranno alcune a sinistra ed altre a destra le prime si riterranno positive, e le seconde negative.

287. Prima di lasciare il presente soggetto, rendiamoci ragione del significato del coefficiente G , che abbiamo chiamato *Modulo di elasticità di torsione*.

Abbiamo veduto (274) che essendo (I) $\frac{\theta r}{c}$ la misura dello spostamento di una fibra lontana per r dall'asse del pezzo, le resistenze che si sviluppano per questo, in un fascetto di fibre giacenti sull'arco uno, ma di raggio r , sono espresse da (III) $G \frac{\theta r^2}{c}$. Lo spostamento dunque delle fibre lontane per l'unità dall'asse del pezzo avrà per misura $\frac{\theta}{c}$, e le resistenze sviluppate dalle fibre giacenti sull'arco uno, e di raggio pur uno saranno espresse da $G \frac{\theta}{c}$.

Ma abbiamo fatta la ipotesi (274) che le resistenze sono proporzionali agli spostamenti.

Dunque starà la proporzione

spostamento $\frac{\theta}{c}$: resistenza $G \frac{\theta}{c}$:: spostamento 1: resistenza G .

Dunque il Modulo G è in sostanza quel peso che misurerebbe la resistenza che si svilupperebbe da un fascetto di fibre di una unità di riquadratura (che noi assumiamo un'oncia quadrata) e lontane per l'unità dall'asse del pezzo, se parimenti si spostasse per una unità, ma conservandosi sempre le resistenze proporzionali agli spostamenti.

ARTICOLO II.

Caso in cui è messa a cimento la resistenza alla rottura per torsione.

288. Supponiamo (fig. 61) che sul pezzo *DKCGG'E* orizzontalmente ed invincibilmente incastrato in *DKC* agisca il peso *P*, che ne metta a cimento la resistenza alla torsione; e che torto dal peso *P*, un fascetto di sue fibre le più lontane dal suo asse *OH* e di sezione un'oncia quadrata, sviluppino una resistenza equivalente ad un peso *T* per ogni oncia quadrata. Se la loro distanza dall'asse *OH* del pezzo sia α , avremo modo di determinare la misura della resistenza, di un pari fascetto di fibre, lontane in vece per *r* dall'asse stesso. Difatto, per la ipotesi fatta (272) avremo

$$\alpha : T :: r : x, \text{ onde } x = \frac{Tr}{\alpha}.$$

Ma abbiamo già trovato (274) per espressione della misura della resistenza delle fibre distanti per *r* dall'asse *OH*, la espressione (II)

$$G \frac{\theta r}{c}.$$

Dunque debb'essere

$$(XVII) \quad G \frac{\theta r}{c} = \frac{Tr}{\alpha}.$$

E quindi, nelle equazioni dell'articolo precedente, potremo porre in vece di $G \frac{\theta}{c}$ il rapporto $\frac{T}{\alpha}$.

Fatta una tale sostituzione nella (IX), ottenghiamo

$$(XVIII) \quad \frac{T}{4\pi} \int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4 d\omega = \Sigma \cdot PD.$$

289. Supponiamo che la *T* sia quello sforzo che soffrono le fibre lontane per α dall'asse del pezzo, nel caso che il peso *P* torci tanto il pezzo, che se per poco si torcesse di più si romperebbe: e sarà appunto nelle fibre le più lontane dall'asse del pezzo, perchè quivi li spostamenti sono maggiori.

Quando tale fosse la T , la equazione (XVIII) precedente si dice, equazione del caso della rottura; la T *Modulo di resistenza alla torsione*; ed il primo membro di quella equazione *momento di resistenza alla rottura per torsione*: ed essa medesima equazione può servire a determinare o il più grande peso che può reggere il pezzo, o le più piccole dimensioni che possa avere, quando conoscessimo il valore del Modulo T .

290. Supponiamo noto il modulo T di resistenza alla torsione; e poniamo nella (XVIII) in vece del valore effettivo di T , una sua frazione, che denoteremo con T' . Quella equazione si trasforma nell'altra

$$(XIX) \quad \frac{T'}{4\pi} \int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4 = \Sigma \cdot PD.$$

Ed in questo caso il suo primo membro dicesi, *momento di resistenza di torsione*: esprimersi per τ ; e, per le cose anzidette (277) si vede essere uguale al momento d'inerzia di una sezione del pezzo valutato rispetto al suo asse, moltiplicato pel peso che misura lo sforzo sofferto dalle sue fibre che sono le più lontane dall'asse stesso, e diviso per la distanza di esse fibre dall'asse medesimo.

291. La equazione precedente (XIX) varrà a determinare il valore di P , se sia un solo il peso, nel qual caso si sopprime la Σ ; od anche le dimensioni del pezzo, perchè le sue fibre non soffrano sforzo maggiore di una data misura espressa da T' . E se fosse dato non solo il pezzo, ma ancora il peso P che vi agisce su, da essa potremmo determinare il più grande sforzo che soffrono le sue fibre.

Se in vece di una sola forza, ovvero peso P , dovessero agire più pesi sul pezzo, con direzioni giacenti sul piano di una medesima sezione del pezzo, determineremo i pesi o forze, supponendo prima che vi agisca su un peso unico Π agente col braccio di leva Δ , per la

$$(XX) \quad \frac{T'}{4\pi} \int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4 = \Pi \Delta;$$

e poi assumendo così le $P, P_1, P_2 \dots$ ed i loro bracci
Teor. delle Res. 31

$D, D_1, D_2, \dots$ che sieno verificate le

$$(XXI) \quad \begin{aligned} P + P_1 + P_2 + P_3 + \dots &= \Pi \\ PD + P_1 D_1 + P_2 D_2 + \dots &= \Pi \Delta. \end{aligned}$$

* 292. Quando le forze agiranno a varia distanza dalla sezione d'incastro, avremo tante equazioni, per quante sono le forze: e ciascuna sarà data dalle (XI), (XII), (XIII), (XIV), etc. quando vi si facciano le sostituzioni medesime. Ponendo nella (XI) invece di $G \frac{0}{k}$, la $\frac{T'}{a}$. Risulta

$$(XXII) \quad \frac{T'}{4a} \int_0^{2\pi} [(f\omega)]^4 = \Sigma \cdot PD + \Sigma \cdot P_1 D_1 + \Sigma \cdot P_2 D_2 + \Sigma \cdot P_3 D_3 + \dots$$

e lo sforzo cui vanno soggette le fibre del pezzo, dalla sezione d'incastro O all'altra A , ove agisce la prima forza A , sarà espresso da

$$(XXIII) \quad T' = \frac{4a (\Sigma \cdot PD + \Sigma \cdot P_1 D_1 + \Sigma \cdot P_2 D_2 + \dots + \Sigma \cdot P_n D_n)}{\int_0^{2\pi} [(f\omega)]^4}$$

Dalla quale si fa manifesto, che a tutte le altre cose pari, la T' sarà tanto più grande per quanti più sono i termini nella parentesi del numeratore.

Ma ove la medesima sostituzione si facesse successivamente nelle (XII), (XIII), (XIV), ec. si avrebbe pel valore di T' una formola analoga alla precedente, successivamente mancante dei termini $\Sigma \cdot DP, \Sigma \cdot DP + \Sigma \cdot D_1 P_1, \Sigma \cdot DP + \Sigma \cdot D_1 P_1 + \Sigma \cdot D_2 P_2$, etc. . .

Dunque in un pezzo di cui è mess' a cimento la resistenza alla torsione, da forze che agiscono su diverse sue sezioni, le fibre che soffrono sforzo maggiore sono quelle interposte tra la sezione d'incastro e l'altra su cui agiscono le forze più prossime ad essa. Onde se il pezzo si rompesse, si romperebbe in questo suo tratto.

* 293. E pertanto se si trattasse di determinare le dimensioni di un albero rotante di trasmissione, su cui agissero più forze a distanze diverse dalla sua sezione, che può aversi, come d'incastro, dovrà farsi uso della (XXII).

ARTICOLO III.

*Del come applicare le precedenti teorie,
e con quali riguardi.*

294. A due cose più comunemente sono dirette le applicazioni delle cose, nelli articoli precedenti esposte: 1.^o alla determinazione dell'angolo di torsione nella sezione per traverso di un pezzo prismatico, sulla quale sta la direzione di una o più forze, che agiscono sul pezzo: 2.^o alla determinazione delle dimensioni di un pezzo, perchè le sue fibre non soffrano sforzo maggiore di una certa misura, oltrepassando la quale, la natura fisica del corpo, e massime la sua elasticità potrebbe essere alterata.

295. La prima determinazione serve a calcolare quella parte di *fatica meccanica* della forza agente sul pezzo, che va perduta, finchè il moto rotatorio ch'essa tende ad imprimere nel pezzo, non abbia luogo di fatto; quando, per la torsione del pezzo essendosi sviluppate nelle sue fibre delle resistenze, la torsione si arresta, ed il pezzo può aversi, come rigido.

Così (fig. 63) sia MN la sezione per traverso del pezzo e CD il braccio all'estremo del quale è applicata la forza F , che colla sua direzione agisce sul medesimo piano MN . E per l'azione della forza F il pezzo venga a torcersi così che il braccio CD venga in CD' ; cosicchè il punto di applicazione D della forza, nel senso della forza medesima, scenda per l'altezza HD' , che chiameremo h .

La discesa $D'H$, sarà

$$h = D \sin. \theta.$$

E quindi la *fatica meccanica* perduta, nel caso contemplato, in cui la forza si mantiene sempre parallela a se stessa, sarà

$$(XXIV) \quad Fh = FD \sin. \theta.$$

Che se la forza si mantenesse in vece sempre normale al suo braccio CD , sarà l'arco DD' medesimo percorso dal-

l'estremo D del braccio CD lo spazio percorso dal punto di applicazione della forza: e sarà allora

$$h = D\theta \frac{\pi}{180}.$$

E quindi, in questo secondo caso, la fatica meccanica perduta sarà espressa da

$$(XXV) \quad Fh = FD\theta \frac{\pi}{180}.$$

E però il cammino h , e le fatiche meccaniche Fh , dipendono dal valore dell'angolo di torsione θ ; ch'è dato dalla formola (X)

$$\theta = \frac{4c}{G} \cdot \frac{\sum PD}{\int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4}.$$

* 296. Se le forze agiscono su sezioni diverse, li angoli di torsione saranno dati dalla formola (XV)

$$\frac{4}{G \int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4} \left\{ \begin{array}{l} \theta + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_n = \\ k(\sum PD + \sum P_1 D_1 + \sum P_2 D_2 + \sum P_3 D_3 + \dots + \sum P_n D_n) \\ + k_1(\sum P_1 D_1 + \sum P_2 D_2 + \sum P_3 D_3 + \dots + \sum P_n D_n) \\ + k_2(\sum P_2 D_2 + \sum P_3 D_3 + \dots + \sum P_n D_n) \\ + k_3(\sum P_3 D_3 + \dots + \sum P_n D_n) \\ \vdots \\ + k_n \sum P_n D_n \end{array} \right\}$$

e le discese $h, h_1, h_2, \dots, h_n$, di ogni punto di applicazione, se le forze si serbano parallele a loro stesse saranno

$$(XXVI) \quad \begin{array}{l} h = D \text{ sen. } \theta \\ h_1 = D_1 \text{ sen. } (\theta + \theta_1) \\ h_2 = D_2 \text{ sen. } (\theta + \theta_1 + \theta_2) \\ \vdots \\ h_n = D_n \text{ sen. } (\theta + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_n); \end{array}$$

oppure

$$(XXVII) \quad \begin{array}{l} h = 0,017 D \theta \\ h_1 = 0,017 D_1 (\theta + \theta_1) \\ h_2 = 0,017 D_2 (\theta + \theta_1 + \theta_2) \\ \vdots \\ h_n = 0,017 D_n (\theta + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) \end{array}$$

se si mantengono normali ai loro bracci di leva.

E dalla (XV) si dedurranno li angoli totali successivi di torsione facendovi prima $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = 0$, e $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$; poi $\theta_2 = \theta_3 = \dots = \theta_n = 0$, e $k_2 = k_3 = \dots = k_n = 0$ e così di seguito.

297. La seconda determinazione (294) serve perchè la macchina di cui è parte il pezzo soggetto a torsione possa aversi sempre come stare nello stato normale (1): e che intanto non sia veramente rigido, onde la forza agente sul pezzo possa andarsi trasmettendo per gradi da un estremo all'altro. Questa determinazione si farà, se le forze stanno sur una sola e medesima sezione, per la (XIX)

$$\frac{T'}{4\pi} \int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4 = z \cdot PD:$$

• 298. Se sono più le sezioni su cui agiscono le forze la determinazione medesima si farà in vece (292) pella (XXII)

$$\frac{T'}{4\pi} \int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4 = z \cdot P_1 D_1 + z \cdot P_2 D_2 + z \cdot P_3 D_3 + \dots + z \cdot P_n D_n.$$

Perciocchè, data la equazione polare

$$\alpha = f(\omega)$$

del perimetro della sezione per traverso del pezzo, possono per essa determinarsene così i parametri, da essere verificata la precedente equazione.

299. Pertanto è evidente, che per applicare le precedenti equazioni, è necessario calcolare la primitiva della funzione $[f(\omega)]^4$, ed avere nota la G , ed anche la T' . E come ciò fare vedremo nei numeri seguenti, cominciando dal calcolare le primitive della funzione $[f(\omega)]^4$ per le sezioni dei pezzi più generalmente usati, come assi di rotazione.

300. Supponiamo, in primo luogo, che la sezione del pezzo sia circolare. Tutti i punti del perimetro del circolo essendo ugualmente lontani dal centro pel raggio, che diremo r , la equazione

$$\alpha = f(\omega), \text{ sarà sostituita dalla } \alpha = r;$$

e la funzione

$$[f(\omega)]^4, \text{ dalla quantità costante } r^4;$$

e sarà

$$\int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4 d\omega = 2\pi r^4.$$

E se indichiamo con d il diametro del pezzo avremo

$$(XXVIII) \int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4 = 0,3927 d^4, \text{ od anche prossimamente} \\ = 0,4 d^4 = \frac{2}{5} d^4.$$

301. Sia in secondo luogo (*fig. 64*) la sezione del pezzo quadrata, come la *MN*. Qui è evidente che se la dividiamo in otto parti, per mezzo dei diametri *AB*, *ab*, e delle diagonali *MN*, *mn*, tanto sarà calcolare la primitiva di che si tratta rispetto a tutto il quadrato, quanto calcolarla rispetto al triangolo *ACN*, e quindi prenderne l'ottuplo; e l'integrazione riuscirà più facile.

Pertanto, chiamando *a* il lato del quadrato $= 2AC$, la equazione

$$a = f(\omega) \text{ sarà sostituita dalla } a = \frac{a}{2\cos.\omega};$$

e quindi sarà

$$\int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4 d\omega = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(\omega)]^4 d\omega = \frac{a^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\omega}{\cos.^4 \omega}.$$

Ma

$$\int \frac{d\omega}{\cos.^4 \omega} = \frac{\text{sen.}\omega}{3\cos.^3 \omega} + \frac{2\text{sen.}\omega}{3\cos.\omega}.$$

Dunque

$$(XXIX) \quad \int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4 d\omega = \frac{2}{3} a^4.$$

302. Supponiamo che questa sezione quadrata sia equivalente alla precedente sezione circolare; così che sia

$$a^2 = \frac{\pi d^2}{4} \text{ e quindi } a^4 = \frac{\pi^2 d^4}{16}.$$

Ponendo questo valore nella precedente espressione, otterremo

$$\frac{2}{3} a^4 = \frac{2\pi^2 d^4}{3 \cdot 16} = \frac{\pi^2}{24} d^4 = 0,41123 d^4.$$

Onde, a pari quantità di materia, il pezzo quadrato è alquanto più resistente del circolare (300), ma di poco differiscono; onde nella pratica, in quanto alla resistenza matematicamente considerata, potrebbe adoperarsi indifferentemente, secondo che farà comodo per altri riguardi di costruzione o di trasmissione, tanto un pezzo a sezioni circolari, quanto uno a sezioni quadrate.

303. Messi i precedenti valori nelle (X, XV, e XVI), e (XIX, XX, e XXIII), otterremo tanto l'angolo di torsione, quanto lo sforzo *T'* sì pei pezzi a sezioni circo-

lari, come pei cilindrici, e per ciascuno dei casi contemplati innanzi.

304. Così pel caso in cui il pezzo è circolare, ed un solo il peso P o forza che vi agisce sù, avremo per la determinazione dell'angolo di torsione.

$$(XXX) \quad \theta = \frac{10c}{G} \cdot \frac{PD}{d^4};$$

e per la determinazione del diametro d del pezzo, o dello sforzo T' ,

$$(XXXI) \quad \frac{T'}{10} d^5 = PD.$$

E si vede che l'angolo di torsione cresce nella diretta della lunghezza del pezzo e nell'inversa della quarta potenza del suo diametro; e lo sforzo che soffrono le sue fibre, nella inversa del cubo del diametro medesimo.

305. E pel caso in cui il pezzo è a sezioni quadrate, e pure un solo il peso P , avremo per l'angolo di torsione

$$(XXXII) \quad \theta = \frac{6c}{G} \cdot \frac{PD}{a^4}$$

e per la determinazione del lato a del quadrato, o dello sforzo T'

$$(XXXIII) \quad \frac{T'}{6} a^5 = PD.$$

Ed anche quì l'angolo di torsione cresce nella diretta della lunghezza del pezzo e nella inversa della quarta potenza del lato; e lo sforzo che soffrono le sue fibre verso i vertici del quadrato, nella inversa del cubo del suo lato.

• 306. Parimenti fatte le sostituzioni medesime tanto nella (XV) quanto nella (XXII) troveremmo le formole determinatrici delli angoli successivi di torsione delle diverse sezioni sulle quali agiscono le forze; ed anche delle dimensioni da avere i pezzi, perchè le forze non producano sulle sue fibre sforzo, oltre una certa misura. Ma tali sostituzioni non faremo, contentandoci darne i risultamenti finali nell'articolo seguente.

307. Supponiamo ora che un pezzo cilindrico sia saldamente, ed invincibilmente incastrato orizzontalmente da un estremo; e che all'altro estremo, essendovi connesso un

braccio di leva', si vada questo caricando con pesi. Per ogni peso aggravante sarà tutto noto nella (XXX). E quindi misuratene con accuratezza tutte le dimensioni, ed anche l'effettivo [angolo θ di torsione, potrebbe calcolarsene la G ; ottenendosene

$$(XXXIV) \quad G = \frac{10c}{\theta} \cdot \frac{PD}{d^4}.$$

Quindi cimentando diverse sostanze, potrà calcolarsi la G , ch'è il *Modulo della elasticità di torsione*.

Così è stato fatto da diversi sperimentatori; e parimenti pei pezzi di sezione quadrata: e se ne sono ottenuti i valori della G ; e per una medesima sostanza, si sono trovati maggiori quelli pei pezzi circolari, che non pei quadrati. La qual cosa avrebbe potuto aspettarsi; perciocchè le fibre verso i vertici del quadrato si trovano quasi non sostenute ai fianchi; laddove quelle verso la superficie dei pezzi a sezioni circolari, sono tutte come appoggiate tra loro; e così, come se si sostenessero. E però se in quanto alla teoria matematica potrebbe essere indifferente l'adottare assi di rotazione a sezioni quadrate o circolari (302), in quanto alla fisica costituzione dei materiali, saranno sempre a preferirsi li assi di rotazione circolari: ammeno che per altri riguardi non si debba fare diversamente.

308. I valori della G registrati nella tavola seguente sono dedotti da quelli adottati dal Poncelet. E sono dati in rotoli per ogni oncia quadrata.

NOME DEI MATERIALI.	MODULO di elasticità di torsione in rotoli per oncia quadrata G.		OSSERVAZIONI.
	PREZZI A SEZIONI		
	circolari	quadrati	
<i>Legnami.</i>			
Abete debole	2800	2100	I numeri notati si prendevano quelli sono, se tutte le dimensioni dei pezzi si prendono in once. Se ne staccheranno le ultime due cifre a destra, se le dimensioni per traverso si prendono in once, e le lunghezze in palmi, lo che torna a comodo del misurare, ed anche del calcolare.
Abete forte	5900	4900	
Querce debole	3100	2600	
Querce la più forte	7700	6400	
<i>Metalli.</i>			
Ferro malleabile di grandi sezioni, ovvero più debole	68000	56700	
Ferro malleabile di piccole sezioni, ovvero il migliore	113600	94600	
Ghisa dolce, ovvero ferro fuso nero	48300	40200	
Ghisa acre, ovvero ferro fuso grigio	40900	34100	

309. Prendiamo ora la (XXXI); e risolviamola rispetto a T' . Ottenghiamo

$$(XXXV) \quad T' = \frac{10PD}{d^3}.$$

E se andremo caricando il braccio del pezzo di pesi sempre più grandi, conosceremo lo sforzo che ne ricevono le fibre alla superficie, che andrà sempre crescendo. E quando il P diventa così grande, che se per poco crescesse di più il pezzo si romperebbe, conosceremo (289) lo sforzo T che ha luogo nel caso della rottura. E quindi il *Modulo di resistenza alla torsione*. Ed è così che è stato sperimentato il valore della T per diversi materiali.

Ma può nascer dubbio se veramente quello è lo sforzo che soffrono le fibre del pezzo quando è in sul punto di rompersi; mentre la formola precedente è dedotta dalla ipotesi (274) che le resistenze che si sviluppano nelle fibre per la torsione

del pezzo siano proporzionali alli loro spostamenti; e questi dovuti al rapporto dello spazio percorso dall'estremo di ciascuna fibra sulla sezione libera estrema del pezzo, alla distanza sua dalla sezione d'incastro. La quale cosa non può assumersi aver sempre luogo: e soprattutto, quando il pezzo si avvicina alla rottura.

E pure abbiamo modo di vedere quando si abbera da tale legge: e ciò per via della (XXXIV)

$$\theta = \frac{10c}{G} \cdot \frac{PD}{d^4}.$$

Da questa è palese che, secondo la teoria, dovrebb'essere sempre l'angolo θ proporzionale al prodotto PD . E può conchiudersi che quando ciò non ha luogo, non regge più la fatta ipotesi delle resistenze proporzionali alli spostamenti delle fibre; e questi uguali al rapporto dello spazio percorso dai punti estremi delle fibre alla distanza loro dall'incastro.

Ora dalli esperimenti fatti dal Savar e da altri si conchiude, che la detta proporzionalità si verifica davvero fintantochè la elasticità di torsione non è alterata.

Dunque le precedenti formole sono veramente fiduciali *fintanto che i pezzi di cui si mette a cimento la resistenza alla torsione non perdono di loro elasticità.*

E però si vede che il valore anzidetto, che si ottiene di T dalla (XXXV) non è veramente lo sforzo sofferto dalle fibre le più lontane dall'asse del pezzo nel caso della rottura; ma sarà un numero puramente ideale, e che sarebbe lo sforzo effettivo di esse fibre, quando davvero si conservasse proporzionale alli spostamenti delle fibre.

Intanto richiedendosi sì nelle macchine come nelle costruzioni, che i pezzi si trovino sempre nello stato normale (1); e ciò avendo luogo appunto quando il pezzo non perde per nulla di sua elasticità; è chiaro che non mai dovremo determinare le dimensioni del pezzo mettendo nelle equazioni precedenti per T quel valore ideale da determinarsi dalla (XXXV), quando il peso P è in sul punto di rompere il pezzo; ma in vece una frazione di esso che abbiamo dinotata con T' , tale che il peso capace di produrre nelle fibre del pezzo tale sforzo, non facesse punto perdersi di elasticità.

E vedesi perchè posto per T' tal frazione di T tutte le formole precedenti sono pienamente fiduciali.

310. Ora è a sapere essere opinione, che la T' debba essere di T una frazione compresa tra i limiti medesimi, trai quali è compresa la frazione R' della R , pella resistenza rispettiva; perciocchè lo spostamento delle fibre di un pezzo che si torce, implica necessariamente l'allungamento di esse medesime fibre; ovvero l'accorciamento, comunque minimo delle centrali, e l'allungamento di quelle verso la superficie del pezzo. Onde anche qui può ritenersi che debba farsi

pei legnami T' tra $\frac{1}{5}$ ed $\frac{1}{10}$ di T

pei metalli fusi T' tra $\frac{1}{4}$ ed $\frac{1}{10}$ di T

pei metalli malleabili T' tra $\frac{1}{5}$ ed $\frac{1}{4}$ di T .

311. Nella tavola seguente sono riportati i valori di T in rotoli per ogni oncia quadrata, dedotti dai valori dati dal Poncelet: e vi sono anche aggiunti i limiti delle frazioni T' della T ; ed anche il medio di essi limiti.

NOME DEI MATERIALI.	M O D U L O di resistenza alla Torsione — T .	LIMITI dei valori di T .		M E D I O tra i limiti.	Osservazioni.
		minimo.	massimo.		
Pei pezzi a sezioni rettangole.					
<i>Legnami.</i>					I numeri delle precedenti colonne valgono quando tutte le dimensioni sono prese in once. Prendendosi la lunghezza dei bracci di leva e quella del pezzo in palmi, e le dimensioni per traverso di questo in once, lo che torna a comodo maggiore della pratica, si sopprimerà l'ultima cifra a destra.
Abete il più debole. . .	1030	103	175	140	
Abete il più forte . . .	2440	244	407	325	
Querce la più debole . .	1310	131	218	175	
Querce la più forte. . .	3190	319	532	426	
<i>Metalli.</i>					
Ferro malleabile più debole, o di grande sezione.	28330	7082	9443	8262	
Ferro malleabile il migliore, o di piccole sezioni .	47220	11803	15740	13772	
Ghisa dolce	27020	2702	6733	4728	
Ghisa grigia.	22620	2262	5633	3958	

NOME DEI MATERIALI.	MODULO di resistenza alla Torsione — T.	LIMITI dei valori di T.		MEDIO tra i limiti.	Osservazioni.
		minimo.	massimo.		
<i>Legnami.</i>					
<i>Pei pezzi a sezioni circolari.</i>					
Abete il più debole . .	1260	126	210	168	I numeri delle precedenti colonne valgono quando tutte le dimensioni sono prese in once. Prendendosi la lunghezza dei bracci di leva o quella del pezzo in palmi, e le dimensioni per traverso di questo in once, lo che torna a comodo maggiore della pratica, si sopprimerà l'ultima cifra a destra.
Abete il più forte . . .	2930	293	488	390	
Querce la più debole . .	1570	157	261	209	
Querce la più forte. . .	3830	385	642	513	
<i>Metalli.</i>					
Ferro malleabile più debole, o di grande sezione.	34000	8500	11333	9916	
Ferro malleabile il migliore, o di piccole sezioni.	56660	14190	18886	16538	
Ghisa dolce	32420	3242	8105	6673	
Ghisa grigia	28140	2814	7036	4925	

312. S'è anche cercato di determinare come stanno tra loro le resistenze che offrono alla Torsione i diversi metalli che più soglionsi usare nelle costruzioni: e si ritiene dai costruttori inglesi essere tra loro, come i numeri seguenti, a cominciare dal piombo ch'è il metallo meno resistente alla torsione, all'acciaio fuso, ch'è il più resistente.

Piombo	10
Stagno.	14
Rame	43
Ottone.	46
Metallo da cannone . . .	50
Ferro fuso ovvero ghisa .	90
Ferro di svezia	95
Ferro inglese	101
Acciaio blistered.	166
Acciaio shear	170
Acciaio fuso	195

* 313. Prima di lasciare il presente argomento, ci piace anche riportare la tavola seguente, nella quale sono notati tanto il modulo di elasticità di torsione, quanto di resistenza alla torsione, in kilogrammi per ogni metro quadrato: e sono li numeri stessi dati dal Poncelet.

NOME DEI MATERIALI.	MODULO di elasticità di torsione—G.	MODULO di resistenza di torsione—T.	OSSERVAZIONI
<i>Legnami.</i>			
Abete il più debole	2 683 000	134 100	I valori de' Moduli G e T, sono relativi ai pezzi di sezione rettangolo. Se sono di sezione circolare, si aggiungerà un quinto in più di essi medesimi valori.
Abete il più forte	6 218 000	310 900	
Querce la più debole	3 284 000	167 200	
Querce la più forte	8 117 592	405 800	
<i>Metalli.</i>			
Ferro malleabile debole, o di grande dimensione...	72 130 000	12 022 000	
Ferro malleabile il migliore, o di piccole dimensioni.....	120 225 000	20 037 000	
Ghisa dolce.....	51 230 000	8 600 000	
Ghisa grigia.....	43 420 000	7 223 000	

ARTICOLO IV.

Si riepilogano le cose esposte, e si applicano a degli esempi.

314. Dalle cose esposte nei tre articoli precedenti, si desumono le seguenti *Definizioni e Principii fondamentali relativi alla resistenza alla torsione.*

Definizioni.

1. *Resistenza alla torsione* di un pezzo prismatico, è quella che il pezzo oppone ad una o più forze agenti sur esso con direzioni perpendicolari al suo asse, ma che non l'incon-

trano : e più propriamente , quando la torsione è così piccola che il pezzo non perde di sua elasticità per questo.

In questo caso dicesi *mettersene a cimento la resistenza alla torsione*.

2. *Resistenza alla rottura per torsione* di un pezzo prismatico rettilineo , è quella opposta dal pezzo alle forze , che mettendone a cimento la resistenza alla torsione , il torcino tanto , ch'è in sul punto di rompersi ; e che si romperebbe di fatto se per poco si torcesse di più.

In questo caso ; dicesi del pezzo *mettersene a cimento la resistenza alla rottura per torsione*.

3. *È conservata la elasticità di torsione* , quando cessata l'azione delle forze che hanno torto il pezzo , questi si storce compiutamente.

4. *È alterata la elasticità di torsione* , quando cessata l'azione delle forze che hanno torto il pezzo , questi non si storce compiutamente

5. *È perduta la elasticità di torsione* , quando torto una volta il pezzo , al cessare dell'azione delle forze che l'hanno torto più non si storce.

6. *Angolo di torsione* di un pezzo di cui si mette a cimento la resistenza alla torsione ; è l'arco circolare percorso da quei punti della sezione ove giace la direzione della forza agente sul pezzo , li quali sono distanti per l'unità dal centro di essa medesima sezione , ovvero dall'asse del pezzo.

7. *Momento di elasticità di torsione* di un pezzo prismatico rettilineo è quel fattore della somma dei momenti delle forze intrinseche o resistenze sviluppatesi nel pezzo pel suo torcersi , valutati rispetto al suo asse , il quale è indipendente dall'angolo di torsione.

8. *Modulo di elasticità di torsione* è quel peso ideale , che misurerebbe la resistenza che si svilupperebbe in un fascetto di fibre di un'oncia quadrata di sezione , e lontane per un'oncia dall'asse del pezzo , se parimenti di un'oncia si spostasse pel torcersi del pezzo ; e conservandosi sempre le resistenze proporzionali agli spostamenti.

9. *Momento di resistenza di torsione* di un pezzo è la

somma dei momenti delle forze intrinseche o resistenze sviluppatesi pel suo torcersi, valutati rispetto all'asse suo, e quando s'è torto tanto da fare soggiacere le sue fibre le più lontane dal medesimo asse, ad un dato assunto sforzo, frazione del modulo di resistenza alla torsione.

Quando l'assunto sforzo si fa uguale al modulo di resistenza alla torsione, il momento di resistenza alla torsione, dicesi *momento di resistenza alla rottura per torsione*.

10. *Modulo di resistenza alla torsione* è quel peso ideale, che misura lo sforzo che soffrirebbe un fascetto di fibre di sezione un'oncia quadrata ed il più lontano dall'asse del pezzo; quando questo si torcesse tanto che fosse in sul punto di rompersi; e se da quando comincia a torcersi, sino a quando si è torto tanto che è in sul punto di rompersi, le resistenze sviluppate fossero sempre proporzionali agli spostamenti delle fibre.

Principii.

Si Noti che nelle formole od equazioni riportate appresso è

ω = l'angolo { coordinate polari del perimetro della sezione del pezzo:

$\alpha = f(\omega)$ = il raggio vettore

G = Modulo di elasticità di torsione:

n = momento di elasticità di torsione del pezzo lungo c :

n_1 = momento di elasticità di torsione del pezzo lungo uno:

n_k = momento di elasticità di torsione del pezzo lungo k :

θ = angolo di torsione di un pezzo lungo c

$\left. \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_n \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{rispettivamente l'angolo di torsione sulla prima} \\ \text{sezione del pezzo dopo quella d'incastro; sulla seconda,} \\ \text{considerando la prima come fissa; sulla terza consi-} \\ \text{derando come fissa la seconda; e così di seguito;} \\ \text{e sulla } n^{\text{esima}} + 1 \text{ sezione considerando come fissa} \\ \text{la precedente;} \end{array} \right.$

P = peso o forza agente sul pezzo, mettendone a cimento la resistenza alla torsione;

D = braccio di leva della forza P :

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} P \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{rispettivamente forza agente sur una prima sezione} \\ \text{dopo quella d'incastro; sur una seconda; sulla terza;} \\ \text{sulla quarta ec...; e sulla } n\text{esima} + 1; \end{array} \right. \\
 \left. \begin{array}{l} k \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{distanze rispettive delle successive sezioni, dopo quella} \\ \text{d'incastro, sulle quali agiscono rispettivamente le} \\ \text{forze } P, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n; \end{array} \right. \\
 \left. \begin{array}{l} D \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \vdots \\ D_n \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{braccia di leva delle forze, rispettivamente } P, P_1, \\ P_2, P_3, \dots, P_n; \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

h = cammino dei punti di applicazione delle forze valutato secondo la loro direzione;

d = diametro di un pezzo di sezione circolare;

a = lato di un pezzo di sezione quadrata;

c = lunghezza totale del pezzo;

π = rapporto della circonferenza al diametro.

Principi generali in ordine alla elasticità di torsione.

1. Quando un pezzo prismatico rettilineo per poco si torce, il momento di elasticità di torsione uguaglia il momento d'inerzia geometrico della sezione, valutato rispetto al suo asse, moltiplicato nel modulo di elasticità di torsione.

È generalmente espresso da

$$\eta = \frac{G}{4c} \int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4.$$

2. Quando un pezzo prismatico rettilineo per poco si torce, a causa di forze agenti tutte con direzioni sul piano di una sua medesima sezione, l'angolo di torsione uguaglia il rapporto della somma dei momenti delle forze valutati rispetto all'asse del pezzo, al momento di elasticità di torsione.

La formola generale è

$$\theta = \frac{\Sigma \cdot PD}{\eta}, \text{ ovvero } \theta = \frac{4c}{G} \cdot \frac{\Sigma \cdot PD}{\int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4 d\omega}$$

* 3. Quando un pezzo prismatico rettilineo per poco si torce, a causa di più forze agenti sur esso, con direzioni su piani di diverse sue sezioni, l'angolo totale di torsione uguaglia l'inverso momento di elasticità di torsione spettante alla lunghezza unità di quel pezzo, moltiplicato per la somma dei prodotti formati dalla distanza dall'incastro della prima sezione su cui agiscono le forze nella somma dei prodotti dei momenti di tutte le forze; dalla distanza della seconda sezione su cui agiscono le forze dalla precedente, nella somma de' momenti di tutte le forze, meno i momenti di quelli che agiscono sulla prima sezione; e così di seguito, sino infine al prodotto della distanza dell'ultima sezione su cui agiscono le forze dalla penultima di esse, nella somma dei momenti delle sole forze che agiscono sur essa ultima sezione.

La formola è

$$\theta + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = \frac{1}{\eta_2} \left\{ \begin{array}{l} k(\Sigma \cdot PD + \Sigma \cdot P_1 D_1 + \Sigma \cdot P_2 D_2 + \dots + \Sigma \cdot P_n D_n) \\ + k_1(\Sigma \cdot P_1 D_1 + \Sigma \cdot P_2 D_2 + \dots + \Sigma \cdot P_n D_n) \\ + k_2(\Sigma \cdot P_2 D_2 + \dots + \Sigma \cdot P_n D_n) \\ + \\ \vdots \\ + k_n \Sigma \cdot P_n D_n \end{array} \right\}$$

e potranno aversene li angoli di torsione successivi di ciascuna sezione su cui agiscono le forze, a cominciare dalla prima dopo quella d'incastro, ritenendo successivamente: solo il primo polinomio orizzontale e la sola θ : solo i due primi polinomi orizzontali e $\theta + \theta_1$: i soli tre primi polinomi orizzontali e $\theta + \theta_1 + \theta_2$: e così di seguito.

Se le sezioni su cui agiscono le forze sono tutte ugualmente lontane tra loro, la formola è

$$\theta + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = \frac{1}{\eta_2} (\Sigma \cdot PD + 2\Sigma \cdot P_1 D_1 + 3\Sigma \cdot P_2 D_2 + 4\Sigma \cdot P_3 D_3 \\ + \dots + (n+1)\Sigma \cdot P_n D_n)$$

e potranno aversene li angoli di torsione successivi di ciascuna sezione su cui agiscono le forze, a cominciare della prima dopo quella d'incastro, ritenendo successivamente: il solo primo termine quale è, tutti li altri col coefficiente uguale uno, e la sola θ : i soli due primi termini, e tutti li altri col coefficiente

Teor. delle Res.

uguale due, e $\theta + \theta_1$; i soli tre primi termini, e tutti li altri col coefficiente uguale tre, e $\theta + \theta_1 + \theta_2$; e così di seguito.

4. Se si voglia che in un dato pezzo prismatico rettilineo i pesi o forze che ne mettono a cimento la resistenza alla torsione, con direzioni giacenti nel piano di una sua medesima sezione, vi producano un dato angolo di torsione, debbono così determinarsi le dimensioni del pezzo, o le intensità e punti di applicazione delle forze, da risultare il momento di elasticità di torsione, moltiplicato per dato angolo di torsione, uguale alla somma dei momenti delle forze.

La formola è la medesima che pel 2.^o principio.

* 5. Se si voglia che in un dato pezzo prismatico rettilineo le forze o pesi che vi agiscono su con direzioni giacenti su diverse sezioni del pezzo, vi producano un dato angolo di torsione, debbono così determinarsi le dimensioni del pezzo, o tali debbono essere le intensità e punti di applicazione delle forze, da risultare il momento di elasticità di torsione, per una sua lunghezza uguale all'unità, moltiplicato pella somma degli angoli di torsione parziale, uguale alla somma dei prodotti formati: dalla distanza della prima sezione su cui agiscono le forze per la somma dei momenti di tutte le forze: dalla distanza della seconda sezione su cui agiscono le forze dalla precedente, nella somma dei momenti di tutte le forze, meno i momenti di quelle che agiscono sulla prima sezione; e così di seguito.

Le formole sono le medesime che pel 3.^o principio.

6. Gli angoli di torsione, nei pezzi a sezioni circolari ed in quelli a sezioni quadrate, stanno tra loro nella diretta della lunghezza dei pezzi, e nella inversa della quarta potenza rispettivamente del diametro o del lato della sezione.

7. Se più forze mettono a cimento la resistenza di torsione di un pezzo prismatico agendo tutte su di un medesimo piano di una stessa sezione, il cammino del punto di applicazione di ciascuna forza, da che cominciano ad agire fino a tanto che non si equilibrano colle resistenze sviluppate, è uguale al suo braccio di leva moltiplicato nel seno dell'angolo di torsione se quella forza si mantiene sempre parallela a se stessa; ed al suo braccio di leva nella lunghezza dell'arco che misura l'angolo di torsione, se la direzione della forza è sempre normale al braccio di leva.

Le formole generali sono :
per la forza parallela a se stessa

$$h = D \sin \theta, \text{ ossia } h = D \sin \frac{\sum PD}{\eta}$$

per la forza sempre normale al braccio di leva

$$h = 0,017 D \theta, \text{ ossia } h = 0,017 D \frac{\sum PD}{\eta}$$

* 8. Se più forze, non tutte con direzioni giacenti in un medesimo piano, mettono a cimento la resistenza di torsione di un pezzo prismatico rettilineo, il cammino del punto di applicazione di ciascuna forza, da che cominciano ad agire, fino a che non sono equilibrate dalle resistenze, è uguale: se la forza si tiene sempre parallela a se stessa, al suo braccio di leva nel seno della somma delli angoli di torsione della sezione del pezzo su del di cui piano agisce, più quelli di tutte le altre sezioni su cui agiscono forze, che sono comprese tra essa sezione e quella d'incastro: se la forza si mantiene sempre normale al suo braccio, al prodotto del suo braccio di leva nella lunghezza di un arco, che misura la somma delli stessi angoli di torsione.

Le formole sono :

se le forze sono sempre ciascuna parallela a se stessa

$$h = D \sin (\theta + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)$$

se le forze sono sempre normali al loro rispettivo braccio

$$h = 0,017 D_n (\theta + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)$$

Momenti di elasticità, angoli di torsione, e cammino dei punti di applicazione delle forze, per pezzi di sezioni circolari e quadrati.

9. Il momento di elasticità di torsione di un pezzo a sezioni circolari è uguale alla quarta potenza del suo diametro nel modulo di elasticità, diviso pel decuplo della sua lunghezza.

La formola è

$$\eta = \frac{G d^4}{10c}$$

10. Il momento di elasticità di torsione di un pezzo a sezioni quadrate è uguale alla quarta potenza del suo lato nel modulo di elasticità diviso pel sestuplo della sua lunghezza

$$\eta = \frac{G a^4}{6c}$$

11. Se più forze agiscono sul medesimo piano di una stessa sezione di un pezzo, di cui ne mettono a cimento la resistenza alla torsione, l'angolo di torsione è dato dalle formole seguenti.

Pezzi di sezioni circolari

$$\theta = \frac{10c\mathfrak{Z} \cdot PD}{Gd^4}.$$

Pezzi di sezioni quadrate

$$\theta = \frac{6c\mathfrak{Z} \cdot PD}{Ga^4}.$$

* 12. Se più forze agiscono su piani di diverse sezioni di un pezzo di cui ne mettono a cimento la resistenza alla torsione, l'angolo di torsione è dato dalle seguenti formole.

Quando le sezioni sui cui piani agiscono le forze sono n di numero ed equidistanti: essendo

le sezioni circolari

$$\theta + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = \frac{10k}{Gd^4} [\mathfrak{Z} \cdot PD + 2\mathfrak{Z} \cdot P_1 D_1 + 3\mathfrak{Z} \cdot P_2 D_2 + \dots + (n+1)\mathfrak{Z} \cdot P_n D_n]$$

le sezioni quadrate

$$\theta + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = \frac{6k}{Ga^4} [\mathfrak{Z} \cdot PD + 2\mathfrak{Z} \cdot P_1 D_1 + 3\mathfrak{Z} \cdot P_2 D_2 + \dots + (n+1)\mathfrak{Z} \cdot P_n D_n].$$

Quando le sezioni sui cui piani agiscono le forze sono n di numero, ma non equidistanti: essendo

le sezioni circolari

$$\theta + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = \frac{10}{Gd^4} \left\{ \begin{aligned} &k(\mathfrak{Z} \cdot PD + \mathfrak{Z} \cdot P_1 D_1 + \mathfrak{Z} \cdot P_2 D_2 + \dots + \mathfrak{Z} \cdot P_n D_n) \\ &+ k_1(\mathfrak{Z} \cdot P_1 D_1 + \mathfrak{Z} \cdot P_2 D_2 + \dots + \mathfrak{Z} \cdot P_n D_n) \\ &+ k_2(\mathfrak{Z} \cdot P_2 D_2 + \dots + \mathfrak{Z} \cdot P_n D_n) \\ &+ \dots + k_n \mathfrak{Z} \cdot P_n D_n \end{aligned} \right\}$$

le sezioni quadrate,

la stessa formola cambiando il fattore $\frac{10}{Gd^4}$, nell'altro $\frac{6}{Ga^4}$.

N. B. Le formole precedenti danno non solo l'angolo di torsione totale, ma ancora li angoli di torsione di ciascuna sezione successiva di quelle su cui agiscono le forze, a cominciare dalla prima dopo quella che θ è, o può aversi come incastrata nell'ultima formola ritenendo prima soltanto il primo polinomio orizzontale e la sola θ ; poi i due primi polinomi orizzontali e $\theta + \theta_1$; poi i tre primi e $\theta + \theta_1 + \theta_2$; e così di seguito:

nelle prime due formole ritenendo successivamente il primo termine, quale è, e tutti li altri col coefficiente =1, e la sola θ ; poi i soli due primi termini, e li altri col coefficiente =2, e $\theta + \theta_1$; poi i tre primi, e li altri col coefficiente =3, e $\theta + \theta_1 + \theta_2$; e così di seguito.

13. Se più forze agiscono sul medesimo piano di una stessa sezione di un pezzo di cui ne mettono a cimento la resistenza alla torsione, il cammino del punto di applicazione di ciascuna forza, è dato dalle formole seguenti:

Se la forza si conserva *sempre parallela a se stessa*

pei pezzi di sezioni circolari

$$h = D_{\text{sen.}} \left(\frac{10c}{Gd^4} \Sigma \cdot PD \right),$$

pei pezzi di sezioni quadrate

$$h = D_{\text{sen.}} \left(\frac{6c}{Ga^4} \Sigma \cdot PD \right).$$

Se la forza si conserva *sempre perpendicolare al suo braccio di leva*:

pei pezzi di sezioni circolari

$$h = \frac{175Dc}{1000Ga^4} \Sigma \cdot PD$$

pei pezzi di sezioni quadrate

$$h = \frac{105Dc}{1000Ga^4} \Sigma \cdot PD.$$

* 14. Se più forze in piani di sezioni diverse, agiscono su di un pezzo, di cui ne mettono a cimento la resistenza alla torsione, il cammino del punto di applicazione di ciascuna forza, è dato dalle formole dell' 8.° principio, ponendovi per la somma $\theta + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n$ il valore che ne sarà dato dal principio 12.°

Principii relativi alla resistenza alla torsione.

15. Se vogliasi che di un pezzo di cui è messa a cimento la resistenza alla Torsione, nessuna sua fibra, soffra sforzo maggiore di una data misura, è necessario che il momento d'inerzia della sezione del pezzo valutato rispetto al suo asse, moltiplicato pel peso che misura esso sforzo sull'unità superficiale (un'oncia quadrata) e diviso per la distanza delle fibre le più lontane dall'asse del pezzo, eguagli la somma dei momenti delle forze estrinseche, valutati rispetto all'asse medesimo.

La regola vale, finchè il pezzo *non perde* la sua elasticità di torsione, ossia finchè il peso che misura il dato sforzo, sia una frazione del modulo di resistenza alla torsione, pei legnami tra $\frac{1}{2}$ ed $\frac{1}{3}$, pei metalli fusi tra $\frac{1}{4}$ ed $\frac{1}{10}$, e pei metalli malleabili tra $\frac{1}{2}$ ed $\frac{1}{4}$.

La formola generale è

$$\frac{T'}{4a} \int_0^{2\pi} [f(\omega)]^4 = \Sigma \cdot PD.$$

Pei pezzi di *sezione circolare*

$$\frac{T'}{10} a^3 = \Sigma \cdot PD.$$

Pei pezzi di *sezione quadrata*

$$\frac{T'}{6} a^3 = \Sigma \cdot PD.$$

* 16. In un pezzo di cui è mess' a cimento la resistenza alla torsione, da più forze che vi agiscono sù, con direzioni su piani diversi, di diverse sue sezioni; le fibre che vi soffrono sforzo maggiore, sono quelle interposte tra la sezione d'incastro, e l'altra su cui agisce la forza più prossima ad essa.

Se ne determineranno le dimensioni pel principio precedente; e la formola è la stessa di quella, mettendo per $\Sigma \cdot PD$, la somma $\Sigma \cdot PD + \Sigma \cdot P_1 D_1 + \Sigma \cdot P_2 D_2 + \text{ecc.}$

17. Li sforzi che soffrono le fibre di un pezzo prismatico rettilineo che si torce, crescono in ragione inversa dei cubi dei diametri, se di sezione circolare, e dei cubi del lato, se di sezione quadrata.

18. In ordine alla teoria matematica ed alla resistenza alla torsione, sarebbe indifferente pella pratica adottare assi di rotazione a sezioni circolari o quadrati, comunque quelli fossero alcun poco meno resistenti di questi. Ma in quanto alla fisica costituzione dei materiali saranno da preferirsi li assi a sezioni circolari.

ESEMPIO 1.°

315. Il vapore colla pressione di 14 rotoli per ogni oncia quadrata, agisca per generazione sur uno stantuffo del

diametro di once 50; e tal forza, per mezzo di una manovella lunga pal. 3,50, sia trasmessa ad un albero rotante di ferro fuso e di sezione circolare, lungo palmi 24, destinato a trasmettere il movimento ad un organo operatore messo all'altro suo estremo.

Si dimanda

1.° Quanto dovrà essere il diametro dell'asse?

2.° Quanta sarà la fatica meccanica perduta da che la forza comincia ad agire sull'albero, fino a tanto che sia trasmessa all'organo operatore?

316. Qualunque sia la composizione della macchina motrice, la forza non mai sarà trasmessa dallo stantuffo all'estremo del braccio della manovella in tutta la sua totalità, nè sempre con pari intensità; purtuttavolta per la determinazione del diametro dell'albero rotante, sarà prudente supporre che non solo tutta intera sia trasmessa la forza; ma ancora colla massima intensità. Calcoliamo dunque quanto questa sia.

Lo stantuffo su cui agisce il vapore essendo del diametro di once 50, la sua area sarà di once quadre

$$\pi \left(\frac{50}{2}\right)^2 = 1963,5.$$

Ma su ogni oncia quadrata deve farsi la pressione di rotola 14.

Dunque la pressione totale sullo stantuffo sarà di rotoli

$$14(1963,5) = 27489.$$

E questo peso il supporremo applicato all'estremo della manovella.

317. E pertanto avremo ricorso alla seconda formola del 13.° principio; ove in vece della somma $\Sigma \cdot PD$ dei momenti, va scritto solo PD per essere qui una la forza o peso.

Faremo uso dunque della

$$\frac{T'}{10} d^3 = PD:$$

e v'è d la incognita.

Però nella

$$d = \sqrt[3]{\frac{10PD}{T'}}$$

dovremo porre

$P = 27489$ rotoli, peso agente all' estremo della manovella,
 $D = 3,5$ palmi, lunghezza della manovella,
 $T' = 567$, numero dato dalla tav. a pag. 252, e medio tra
 i limiti massimo e minimo.

Fatte le sostituzioni risulta

$$d = \sqrt[3]{\frac{27489 \cdot 35}{567}};$$

e prossimamente in più

$$d = \sqrt[3]{1697} = \text{poco meno di } 12.$$

Dunque il diametro dell' albero rotante capace di trasmettere la forza di tanta potente macchina si farà di once 12.

318. Per vedere ora la fatica meccanica che dicesi perduta, ricorriamo alla formola 1.^a del 13.^o principio

$$h = D \text{ sen. } \left(\frac{10ePD}{Gd^4} \right).$$

Perciocchè qui la forza non è sempre normale al braccio di leva.

E qui porremo

$P = 27489$ rotoli

$D = 3,5$ palmi

$e = 24$ palmi

$d = 12$ once

$G = 483$, numero dato dalla tav. a pag. 249.

Riesce

$$h = (3,5) \text{ sen. } \left(\frac{24 \cdot 27489 \cdot 35}{483 (12)^4} \right) = (3,5) \text{ sen. } \frac{23090760}{10015488};$$

ossia prossimamente

$$h = (3,5) \text{ sen. } (2^{\circ}, 18') = (3,5) (0,04013) = 0,14.$$

Dunque il cammino che sarà percorso dall' estremo della manovella, prima che il moto non si comunichi all' ultima estremità dell' albero, è di palmi 0,14.

319. Questo cammino moltiplicato pella forza da trasmettersi, calcolata per rotoli 27489, dà la fatica meccanica perduta. Ed è

$$Ph = 3848,40$$

Dunque la fatica meccanica perduta sarà di un cantajo, elevato a palmi 38,48 di altezza.

ESEMPIO 2.^o

320. Debbaasi fare un maneggio da esser mosso da otto cavalli, per mezzo di quattro vetti ogni uno lungo pal. 15; e ad ogni uno dei quali debbansi attaccare due cavalli. Per la voluta trasmissione del moto, dal maneggio ad un *albero orizzontale rotante*, debbaasi fare tanto alto l'*albero verticale* del maneggio che la distanza dei vetti, ai quali vanno attaccati i cavalli, alla *corona di trasmissione* sia di pal. 36.

Essendo l'albero del maneggio, di querce la più forte, si dimanda

1.^o di quanto debb'essere la sezione quadrata dell'albero?

2.^o quanta sarà la fatica meccanica perduta delli otto cavalli, da che la forza si trasmette all'albero, fin tanto che non si troverà essere trasmessa al luogo ove è applicata la sua corona di trasmissione?

321. La forza assoluta di un cavallo che tira, variando dai 337 ai 560 rotoli, e di tale natura essendo quella sviluppata dalli otto cavalli agenti sul maneggio, fintantochè questo non mettesi in moto; potremo supporre che lo sforzo di ciascun cavallo all'estremo di ciascun vette sia di 500 rotoli; e che però sull'albero verticale del maneggio, di cui vuolsi determinare la sezione, agiscano quattro forze uguali, equivalente ciascuna a 1000 rotoli, ognuna con un braccio di palmi 15; e tutte nel piano di una medesima sezione.

322. Nella formola seguente dunque

$$\frac{T'}{6} a^3 = \Sigma PD,$$

che è la terza del 15.^o principio, e che scioglie il problema, quando è risolta rispetto ad a , porremo

$P = 1000$ rotoli

$D = 15$ palmi

$T' = 50$ numero poco inferiore al limite massimo dei valori dati per T' dalla tav. a pag. 251, mentre lo sforzo asso-

Teor. delle Res.

34

luto dei cavalli dura per pochi istanti: ed i momenti PD nel caso attuale essendo tutti uguali ed al numero di quattro, nella formola precedente porremo $\Sigma \cdot PD = 4PD$.

323. Avremo dunque in primo

$$a = \sqrt[3]{\frac{2APD}{T'}}.$$

Fatte le sostituzioni, ne risulta

$$a = \sqrt[3]{\frac{24 \cdot 1000 \cdot 15}{50}} = \sqrt[3]{24 \cdot 100 \cdot 3} = \sqrt[3]{7200};$$

e quindi, prossimamente in più

$$a = 19,4.$$

Dunque l'albero del maneggio si farà di 19 once e mezza di lato.

324. Per calcolare la fatica meccanica perduta, cominceremo dal calcolare il cammino del punto d'applicazione della forza nel senso della sua azione, ricorrendo al 13° principio: ed avendo qui effetto il tiro sempre in direzione normale al vette, ci avvaleremo della formola

$$h = \frac{105Dc}{1000G} \cdot \frac{\Sigma \cdot PD}{a^4},$$

che è la 4ª del detto principio.

E vi porremo

$D = 15$ palmi,

$c = 36$ palmi,

$a = 19,5$ once,

$P = 1000$ rotoli,

$G = 64$, numero dato dalla tavola a pag. 249 per la querce forte.

E ponendovi, come sopra (322), $\Sigma \cdot PD = 4PD$.

Fatte le sostituzioni si ha

$$h = \frac{105 \cdot 15 \cdot 36 \cdot 4 \cdot 1000 \cdot 15}{1000 \cdot 64 \cdot (19,5)^4} = \frac{105 \cdot 9 (15)^2}{4 (19,5)^4} = \frac{212625}{578360,25};$$

e quindi prossimamente, il cammino del punto di applicazione della forza sarà

$$h = 0,31 \text{ palmi.}$$

325. Il precedente spazio percorso, moltiplicato per la forza totale delli otto cavalli che è di rotoli 4000, darà la fatica meccanica perduta richiesta: e sarà

$$Fh = 4000(0,31) = 1240.$$

Dunque la fatica meccanica perduta, da che la forza delli otto cavalli comincia a comunicarsi all'albero del maneggio, fin tanto che non si trasmette al luogo, ove stà la corona di trasmissione, è di un cantaio elevato a 12 palmi e 4 oncie di altezza.

ESEMPIO 3.º

* 326. Supponiamo che sul maneggio contemplato nell'esempio precedente, in vece di agire otto cavalli, ve ne agiscano dodici; dei quali otto su quattro vetti al pian terreno, ed altri quattro su due vetti posti a mezza altezza dell'albero del maneggio; camminando questi ultimi quattro cavalli sur un palco fatto a bella posta.

In questo nuovo caso si dimanda

1.º qual dovrà essere il lato della sezione dell'albero?

2.º quale ne sarà la fatica meccanica delli dodici cavalli, che si dice perduta?

* 327. Per la determinazione del lato del quadrato, in forza del 16º principio, prendiamo la medesima formola precedente, ove in vece di $\Sigma \cdot PD$ dovremo porre $6PD$.

La formola diventerà

$$\frac{T'}{8}a^3 = 6PD, \text{ onde } a = \sqrt[3]{\frac{36PD}{T'}}.$$

Ove porremo

$D = 15$ palmi,

$P = 1000$ rotoli,

$T' = 50$.

Risulta

$$a = \sqrt[3]{\frac{36 \cdot 1000 \cdot 15}{50}} = \sqrt[3]{10800} = \text{prossimamente } 22,2.$$

Dunque il lato dell'albero verticale dovrà essere di oncie 22,2 di riquadratura.

* 328. Per calcolare il cammino dei punti di applicazione della forza, ricorreremo al 11º principio; epperò, coll'errore di meno di un centesimo ci avvaleremo della formola

$$h = \frac{Dk}{106a^4} (\Sigma \cdot PD + 2\Sigma \cdot P_1 D_1);$$

arrestandoci al secondo termine di quelli nella parentesi della 2.^a formola del 12.º principio, due qui essendo le sezioni del pezzo su cui agiscono le forze. Ritenendo per intero la formola avremo il cammino dei punti di applicazione della forza delli otto cavalli inferiori; sopprimendo il primo termine nella parentesi, e diminuendone di una unità il coefficiente numerico del secondo, avremo quello dei punti di applicazione della forza dei quattro cavalli superiori.

Facciamo dunque

$$D = 15 \text{ palmi,}$$

$$D_1 = 15 \text{ palmi,}$$

$$k = 18 \text{ palmi,}$$

$$a = 22,2 \text{ once,}$$

$$\Sigma \cdot P_1 = 4000 \text{ rotoli, forza assoluta di otto cavalli,}$$

$$\Sigma \cdot P = 2000 \text{ rotoli, forza assoluta di quattro cavalli,}$$

$$G = 64, \text{ come dalla tav. a pag. 249.}$$

Ottenghiamo pei cavalli inferiori

$$h_1 = \frac{15 \cdot 18}{10 \cdot 64 (22,2)^4} (2000 \cdot 15 + 2 \cdot 4000 \cdot 15)$$

e pei cavalli superiori

$$h = \frac{15 \cdot 18}{10 \cdot 64 (22,2)^4} (2000 \cdot 15).$$

Onde, fatti i calcoli, accennati dentro e fuori le parentesi

$$h_1 = \frac{135 (150\,000)}{77\,725\,204,992}.$$

$$h = \frac{135 (30\,000)}{77\,725\,204,992}.$$

Quindi prossimamente

$$h_1 = 0,25 \text{ di palmo}$$

$$h = 0,05 \text{ di palmo.}$$

E questi sono i cammini de' punti di applicazione delle forze; finchè, a computare da quando cominciano ad agire sull'albero rotante, non sono trasmesse a quel suo luogo che sostiene la corona di trasmissione.

* 329. Moltiplicati questi cammini per le forze rispettive, e sommate i prodotti avremo la fatica meccanica perduta: ed è

$$Ph + P_1 h_1 = 1000 (0,25) + 2000 (0,05) = 1100.$$

Dunque la fatica meccanica perduta sarà pari ad un cantaio elevato a palmi undici.

* 330. Dal precedente risultamento, si vede che sarebbe meglio, nel maneggio di che si tratta, attaccare otto cavalli sopra, e quattro sotto.

CAPO V.

DELLA RESISTENZA COMPOSTA.

331. Nei capi precedenti abbiamo esposti quei principii fondamentali della teoria delle resistenze che sono più immediatamente e speditamente capaci di pratica applicazione; sicchè, secondo il nostro proponimento (5), avremmo già finito il nostro lavoro; se pure non avessimo detto volere anche *accennare qualche cosa sulla resistenza composta*; collo scopo massimamente di voler mostrare, come i principii spettanti alle quattro sorte di resistenze semplici, possano pure immediatamente applicarsi ai più ovvii casi e frequenti della resistenza composta. La qual cosa nel primo articolo di questo capo faremo. Quindi, nel secondo, i principii che se ne deducono riepilogheremo applicandoli ad un esempio.

ARTICOLO I.

332. Supponiamo scomposta la forza obliqua la di cui direzione incontra l'asse del pezzo, in due altre, l'una secondo l'asse, l'altra ad esso normale.

La prima forza stenderà, o premerà le fibre del pezzo; la seconda, flettendolo, stenderà quelle verso la convessità, e comprimerà le altre verso la concavità.

333. Avvenga il primo caso, come è espresso nella (fig. 4'). Se non esistesse la forza f , per l'azione della forza φ , le fibre del pezzo si stenderebbero tutte; e pei principii dimostrati all'art. 2.º del capo I., l'allungamento di esse fibre (il di cui valore sarà espresso dalla [XV.] del capo I.) risulta

$$\frac{l}{L} = \frac{\varphi}{E_1 A}.$$

Se in vece non esistesse la forza φ ; per l'azione della forza f , curvandosi il pezzo, le sue fibre verso la convessità, che sono le più lontane dall'asse neutrale, si allungerebbero più di tutte le altre, per (114)

$$ay''$$

essendo α la distanza di esse fibre dall'asse neutrale ed y'' la derivata seconda dell'ordinata della curva di flessione riferita ad una retta tangente nel suo elemento estremo incastrato in B .

Dunque per l'azione simultanea delle due forze φ ed f , le fibre verso la convessità, le più lontane dall'asse neutrale, si allungheranno per

$$(I) \quad \frac{\varphi}{E_1 A} + \alpha y'';$$

ed è evidente che il massimo allungamento totale delle fibre del pezzo avrà luogo in quella sua sezione, ove la y'' ha il più gran valore; onde chiamando x il valore particolare della x corrispondente al più grande della y'' , l'allungamento producente il più grande sforzo nelle fibre del pezzo sarà espresso in generale da

$$(II) \quad \frac{\varphi}{E_1 A} + \alpha y''_x.$$

Nel medesimo tempo le fibre del pezzo poste verso la concavità, a causa della forza f , accorciandosi della quantità $\beta y''$, ed a causa della forza φ allungandosi per $\frac{\varphi}{E_1 A}$, si allungheranno od accorceranno della quantità

$$(III) \quad \frac{\varphi}{E_1 A} - \beta y''_x$$

secondo che il primo termine è maggiore del secondo o viceversa.

Quindi è che nel caso che qui contempliamo, della *fig. 4'*, le fibre che soffrono sforzo maggiore sono quelle verso la convessità, le più distanti dall'asse neutrale, nella sezione corrispondente all'ascissa x ; e le quali essendo tese sviluppano in vero la resistenza assoluta positiva, dovuta all'allungamento (II)

$$\frac{\varphi}{E_1 A} + \alpha y''_x.$$

Ma se un fascio di fibre di sezione uno, si allunga per una data quantità, $\left(\text{denotata in generale da } \frac{l}{L} \right)$ la forza che l'allunga è data dalla (XIV) del capo 1°; ed è essa forza che misura lo sforzo sofferto dalle fibre.

Dunque nel caso che contempliamo, lo sforzo sofferto dalle fibre del pezzo, le quali sono le più tese, sarà

$$E_1 \left(\frac{\varphi}{E_1 A} + \alpha y''_x \right).$$

E se vorremo che questo sforzo non sia maggiore di una data misura che diremo Y , dovremo fare così le dimensioni del pezzo, ovvero la intensità della forza, da fare essere

$$(IV) \quad Y = E_1 \left(\frac{\varphi}{E_1 A} + \alpha y''_x \right).$$

334. Abbia ora luogo il secondo caso; cioè quello espresso nella (fig. 4).

La forza φ , se sola esistesse, accorcerebbe il pezzo di $\frac{\varphi}{E_2 A}$; e l'altra f , se esistesse senza la φ , ne accorcerebbe quelle verso la concavità, e le più lontane dall'asse neutrale di $\beta y''$.

Quindi dimostrerebbesi, come sopra (333), che lo sforzo sofferto dalle fibre del pezzo, le quali sono le più compresse, sarà

$$E_2 \left(\frac{\varphi}{E_2 A} + \beta y''_x \right).$$

E se vorremmo che non il fossero oltre una certa misura Y , dovrà essere

$$(V) \quad Y = E_2 \left(\frac{\varphi}{E_2 A} + \beta y''_x \right).$$

335. In ambi i casi, se oltre alla forza isolata F , ve ne fossero delle agenti con continuità dall'incastro B del pezzo sino all'estremo A , scomposta ciascuna in due, l'una P secondo l'asse del pezzo, e l'altra Q ad esso perpendicolare, le prime insieme colla φ si spenderebbero a stendere o comprimere il pezzo, e le seconde a fletterlo; ed avremo rispettivamente pel primo caso

$$(VI) \quad Y = E_1 \left(\frac{\int_x^l P + \varphi}{E_1 A} + \alpha y''_x \right);$$

e pel secondo caso

$$(VII) \quad Y = E_2 \left(\frac{\int_x^l P + \varphi}{E_2 A} + \beta y''_x \right).$$

Se non che, l'azione delle forze P non essendo interrotta alla sezione corrispondente all'ascissa x , quando questa non corrispondesse alla sezione d'incastro, potrebbe pure avvenire che comunque $\alpha y'_x$, o $\beta y''_x$ acquistassero il più gran valore quando $x=x$, non l'acquistasse del pari tutto il fattore tra parentesi. Epperò in questo caso più generale, in cui esistono le forze agenti con continuità sul pezzo (come sarebbe quello del peso proprio del pezzo) dovremo intendere per x non l'ascissa che dà il più gran valore alle $\alpha y''$, o $\beta y''$, ma che dà il più gran valore a tutto il fattore anzidetto.

Per tanto dal fin qui detto, si fa manifesto che tutto si riduce a determinare il valore di y''_x .

336. Secondo il fatto ragionamento, si è venuto tacitamente a supporre, che la flessione del pezzo sia dovuta alla sola forza f , componente della F , senza che per nulla v'influisse la φ : e questa ipotesi è seguitata dai costruttori anche i più accurati. E però stando ad essa, la y'' avrà, pei diversi casi che possono darsi, i valori che ne vengono forniti dalle diverse equazioni dell'art. 1° del capo 3°: anzi pell'art. 2° del capo stesso ne saranno forniti proprio i valori della y''_x .

Di fatto (156) nella prima sezione di quell'articolo abbiamo pei diversi casi, valutati i più grandi valori di $\alpha y''$, che trattandosi di pezzi prismatici, eguagliar debbono il momento di resistenza rispettiva, che (156,236) abbiamo chiamato ρ .

Dunque nelle formole (IV) e (V) riterremo implicitamente la *falsa ipotesi* se v'introdurremo la ρ , ma ritenendo rappresentar essa le quantità calcolate nell'art. 2° del capo terzo, e che debbono eguagliarla.

Ma le determinate quantità che uguagliar debbono la ρ , per ciascuno dei diversi casi contemplati al capo 3.°, il sono nella ipotesi di una flessione piccolissima, nel qual caso si può ritenere i moduli di elasticità assoluti uguali tra loro ed al modulo di elasticità rispettiva (215 e segu.); cioè $E_1=E_2=E$.

Dunque, nei casi delle fig. 1, ed 1', dovremo aver sempre:

$$(VIII) \quad y = E \left(\frac{\varphi}{EA} + \alpha y''_x \right).$$

E qui per y''_x dovremo porre il valore che ne porge la relazione

$$\rho = ay''_x; \text{ ovvero la } \rho = EM y''_x,$$

che ne risulta, quando per a poniamo il suo valore espresso in generale (XIV del cap. 3°) da EM . Quindi avremo

$$(IX) \quad H = \frac{\varphi}{A} + \frac{ap}{M}.$$

E nel caso più generale della esistenza di forze agenti con continuità per tutta la lunghezza del pezzo (335)

$$(X) \quad H = \frac{\int_x^c P + \varphi}{A} + \frac{ap}{M}.$$

E basterà per ciascun modo di giacere del pezzo, in conformità delle cose contemplate all'art. 2° del capo 3°, porre per ρ la quantità che deve eguagliarla, come in quel medesimo capo fu trovato: ed anche per α la β , se questa fosse maggiore di quella.

337. Così, a cagion d' esempio, supponiamo che il pezzo obbliquo BA , facente l'angolo α colla verticale, incastrato in B , sia caricato uniformemente di pesi Π ; e che anche agiscavi su una forza isolata F al suo estremo.

Scomposti i pesi Π e la forza F , in due forze l'una secondo l'asse del pezzo, l'altra ad esso normale, saranno le prime

$$\Pi \cos. \alpha, \quad F \cos. \alpha$$

e le seconde

$$\Pi \sin. \alpha, \quad F \sin. \alpha.$$

Quindi per la (Li) del capo 3°, avremo

$$\rho = \left(\frac{\Pi c}{2} + F \right) \sin. \alpha.$$

E poichè allora (159) le fibre le più tese stanno nella sezione d'incastro, ove la $x = \text{zero}$; avremo rispettivamente

$$\int_x^c P dx = \int_0^c \Pi \cos. \alpha \cdot dx = \Pi c \cos. \alpha, \quad \varphi = F \cos. \alpha.$$

Quindi nel caso assunto dovrà essere

$$H = \frac{(\Pi c + F) \cos. \alpha}{A} + \frac{a \left(\frac{\Pi c}{2} + F \right) \sin. \alpha}{M}.$$

Teor. delle Res.

35

E se il pezzo fosse rettangolo, nel qual caso (7,187)

$$A = ab, \quad M = \frac{a^3b}{12}, \quad \text{ed } \alpha = \frac{a}{2}$$

si avrà, dopo le riduzioni,

$$Y = \frac{(11c + F) \cos. \omega}{ab} + \frac{3(11c + 2F)c \sin. \omega}{a^2b}.$$

Ed andrebbero così determinate le dimensioni del pezzo a, b, c od i pesi 11 , e forza F , da fare verificare la equazione di sopra.

338. E si vede, come, stando alla fatta ipotesi (336), seguitata anche dai più accurati costruttori, si possa, per le cose dette innanzi, relative alla resistenza assoluta positiva o negativa ed alla resistenza rispettiva, dedurne le equazioni determinatrici delle dimensioni dei pezzi prismatici rettilinei o le intensità delle forze da agirvi su, perchè, nei diversi casi contemplati, niuna fibra di ciascun pezzo sia tesa o compressa oltre una data misura.

Anzi se si ponga mente alla composizione delle precedenti equazioni, si caverà regola generale, per la quale speditissimamente si potranno applicar le cose relative alle resistenze assoluta e rispettiva, anche alla resistenza che debbe sviluppare un pezzo, quando le forze sono oblique al suo asse; o ciò che è lo stesso, quando contemporaneamente più forze agiscono sul pezzo; ed alcune mettendone a cimento la resistenza assoluta, altre la resistenza rispettiva.

339. Riprendiamo la (IX)

γ

$$Y = \left(\frac{\varphi}{A} + \frac{a\varphi}{M} \right).$$

Osserviamo.

Cosa è qui il rapporto $\frac{\varphi}{A}$, quando vogliasi applicare la teoria della resistenza assoluta?

È (20,21) quella parte del modulo di ultima coesione che abbiamo chiamato C' , quando trattasi del caso della *fig. 4'*; oppure quella parte del modulo di resistenza allo schiacciamento (66,84) che abbiamo chiamato S' , quando della *fig. 4*.

A che debb'essere eguale nelle applicazioni il secondo membro della (II) del capo terzo che uguaglia q'' , ed il di cui più gran valore abbiamo qui indicato con p ?

Debb'essere uguale (158) ad $\frac{R'}{\alpha} M$, ove R' è una frazione assunta del modulo di resistenza rispettiva.

Dunque, in vero, l'ultima scritta equazione (ed anche l'altra (X), come non è difficile convincersene) equivalgono all'altre

$$(XI) \quad H = (C' + R')$$

$$(XII) \quad H = (S' + R')$$

secondo che la risultante delle componenti secondo l'asse, delle forze che agiscono sul pezzo, tende a stenderlo, od a comprimerlo.

Dunque, in vero, le equazioni determinatrici delle dimensioni dei pezzi prismatici rettilinei di cui si mette a cimento la resistenza composta di che si tratta, od in vece delle intensità delle forze che possono agirvi sù, equivalgono a questo: che lo sforzo che si vuole che soffrano le fibre del pezzo che sono le più tese o le più compresse, eguagliar deve la somma degli sforzi parziali dovuti alle due resistenze assoluta e rispettiva di che si compone la resistenza effettiva del pezzo.

Quindi può darsi la seguente regola pratica per la resistenza composta di che si tratta:

1.° si scomponga ciascuna forza in due altre, l'una parallela all'asse del pezzo, l'altra ad esso normale:

2.° si consideri il pezzo come soggetto alle sole componenti secondo l'asse e si stabilisca una prima equazione per la resistenza assoluta:

3.° si consideri il pezzo medesimo, come soggetto alle sole forze componenti normali all'asse, e si stabilisca una seconda equazione per la resistenza rispettiva:

4.° si prenda un numero inferiore od al modulo di ultima coesione se le forze secondo l'asse del pezzo lo stendono, od al modulo di resistenza allo schiacciamento se il comprimono; e scompongasi in due altri che abbiano presso

a poco il rapporto medesimo delle frazioni dei moduli di resistenza assoluta e rispettiva, che si adotterebbero, se si trattasse di resistenze semplici, ed il numero proporzionale al modulo di resistenza assoluta si ponga nella prima detta equazione, l'altro proporzionale al modulo di resistenza rispettiva si ponga nella seconda:

5.° le due equazioni così ottenute si trattino simultaneamente.

* 340. La regola precedente è seguitata anche dai più accurati costruttori: e la ipotesi sulla quale è fondata, equivale (336) a supporre che lo componenti secondo l'asse del pezzo non influiscano punto alla flessione. La qual cosa veramente non può avvenire; mentre le forze essendo applicate sempre sul pezzo, non appena esso comincia a flettersi, che le componenti secondo l'asse del pezzo, cominciano ad agirvi con un certo momento, dipendente dallo spostamento dalla primitiva posizione dell'individuato punto al quale è applicata ciascuna individuata forza. E poichè il pezzo sviluppa le resistenze o forze intrinseche, dopo che già ha subita quella flessione, pella quale le resistenze sviluppate sono tali da neutralizzare l'ulteriore effetto delle forze estrinseche agenti sul pezzo; si vede, che, stando al rigore mattematico, non può punto ritenersi che le componenti secondo l'asse del pezzo non influiscano alla flessione.

Teniamo conto di questa simultanea influenza di esse componenti sulla flessione del pezzo, e vediamo quale sarebbe in tal caso il valore della y''_x da sostituirsi nella (VIII).

* 341. Il pezzo sia orizzontale ed orizzontalmente incastrato da un estremo; e tutte le forze agenti sur esso stiano su di un medesimo piano. Ve ne siano delle agenti con continuità dall'incastrato all'altro estremo del pezzo; altre siano isolate.

L'effetto di queste forze non potrà essere che quello d'incurvare il pezzo nel piano delle forze; e se dopo incurvatosi alquanto, si ferma nella nuova posizione, ciò sarà per le forze intrinseche sviluppatesi.

Ma anche quì l'incurvarsi del pezzo non può avvenire che rotando ogni sua sezione intorno ad un asse, che nel caso della sua fermata diventa asse di equilibrio.

Dunque anche quì le forze intrinseche sviluppate o resistenze

saranno come quelle contemplate al n.° 111; e perchè vi potessimo pure applicare i principii fondamentali dei due primi capi dovremo porre le medesime supposizioni espresse nel n.° 112. E quindi, assunti li assi coordinati, come al n.° 114, e le medesime denominazioni, sarà [119 (IV)]

$\Sigma y''$

sempre la espressione della somma de' momenti delle resistenze.

Chiamiamo

P, Q le componenti delle forze che agiscono con continuità sul pezzo, parallele rispettivamente all'asse delle x (parallelo all'asse del pezzo diritto), ed all'altro delle y ;

γ, λ le coordinate particolari, del punto di applicazione di una individuata coppia di forze P e Q ;

φ, f le componenti parallele alle x ed alle y della forza isolata applicata all'estremo del pezzo;

c, h le coordinate del punto di applicazione di essa coppia di forze;

e colle medesime lettere numerate, le altre forze isolate applicate sul pezzo, e le coordinate del loro punto di applicazione.

La somma dei momenti di tutte le P e Q , valutati rispetto ad un individuato asse di equilibrio del pezzo delle coordinate x, y , che per maggiore generalità supporremo per ora stare tra l'incastro ed il punto di applicazione della prima forza isolata, sarà espressa da

$$\int_x P \gamma' [\lambda(\gamma) - y] \quad , \quad \int_x Q \gamma'' (\gamma - x) ;$$

e le somme dei momenti, rispetto al medesimo asse di equilibrio; delle forze isolate, saranno rispettivamente espresse da

$$\varphi(h-y) + \varphi_1(h_1-y) + \varphi_2(h_2-y) + \text{cc.}$$

$$f(c-x) + f_1(c_1-x) + f_2(c_2-x) + \text{cc.}$$

o più semplicemente da

$$\Sigma \varphi(h-y) \quad , \quad \Sigma f(c-x).$$

Dunque la equazione di equilibrio dei momenti, la più generale, per la resistenza di che si tratta, sarà

$$(XIII) \Sigma y'' = \int_x P \gamma' [\lambda(\gamma) - y] + \int_x Q \gamma'' (\gamma - x) + \Sigma \varphi(h-y) + \Sigma f(c-x),$$

secondo che le forze parallele all'asse del pezzo il tendono od il premono.

E però ove si volesse con maggiore esattezza procedere nella (VIII), o (IX) e (X), in vece di y''_x dovrebbe porsi il più gran valore

che può competere al secondo membro della precedente equazione diviso per ϵ .

* 342. Non entreremo a dire come si possa determinare il più gran valore di che è capace il detto secondo membro; perciocchè troppo usciremmo fuori dai limiti tra i quali, pel fine dell'opera, ci abbiamo dovuto tenere; ma non pertanto ci piace indicare, come procedersi, quando una sola sia la forza isolata, e tali le forze agenti con continuità, che la P riesca zero.

In tal caso supponiamo calcolata la primitiva definita $\int_a^c Qy'(y-x)$, e che sia $Q(x)$; la equazione di sopra (XIII) diventa

$$(XIV) \quad \epsilon y'' = Q(x) \mp \varphi(h-y) + f(c-x).$$

S' integri questa equazione così che, quando $x=0$, sia $y=0$ ed $y'=0$; e risulti in fine la sua primitiva

$$\dagger(h, x, y) = 0.$$

Fatto in questa $x=c$, ed $y=h$, se ne cavi il valore di h ; e sia

$$h = H(c).$$

Posto questo valore nella precedente si avrà

$$\dagger(H, x, y) = 0;$$

e da questa si cavi

$$y = X(H, x).$$

I trovati valori di h ed y , si pongano nella (XIV). Si otterrà

$$(XV) \quad \epsilon y'' = Q(x) \mp \varphi(H-X) + f(c-x).$$

E ridotta così la (XIV) a contenere tutte quantità note, e la sola variabile x , sarà facile determinare il valore χ di x , che fa acquistare al suo secondo membro il più gran valore; onde poi si otterrà in fine

$$y'' = \frac{1}{\epsilon} \{ Q(x) \mp \varphi[H(c) - X(x)] + f(c-x) \};$$

e questo è il valore che per y''_{χ} deve porsi nella (VIII) e si prenderà il segno superiore, o l'inferiore, secondo che la φ agisca nel senso delle x positive o delle x negative.

Questo è il metodo generale; ed abbiamo voluto accennarlo, onde sulla forma del finale risultamento poter fare una osservazione, la quale mostrerà chiaro che la regola data al n.° 339 e che nasce dalla ipotesi fatta al n.° 336 è tale che vi si può nella pratica con assai fiducia riposare.

343. Nella equazione generale (V) del capo terzo, relativa alla resistenza rispettiva, supponiamo che una sola sia la forza isolata, e chiamiamola f ; e supponiamo che la primitiva $\int_0^c \varphi \gamma'(\gamma-x)$ sia $Q(x)$. Quella equazione si cangerà nell'altra equivalente

$$(XVI) \quad \varphi y'' = Q(x) + f(c-x).$$

Or paragoniamo questa equazione (XVI) colla (XV).

È evidente che la (XV), differisce dalla (XVI) pel solo termine $\mp \varphi(H-X)$; e che ove questo termine non vi fosse sarebbero perfettamente identiche; cosicchè entrambe darebbero il medesimo più gran valore per y'' .

Ma la $\varphi(H-X)$ non può essere zero ammeno che la φ non sia zero, od anche ammeno che il pezzo non si pieghi nè punto nè poco.

Dunque il ρ nascente dalla equazione (XV), sarà minore di quello che si ha dalla (XVI) se la forza φ tende il pezzo; e maggiore di essa se la φ il preme.

Dunque in vero, stando alla regola del n.° 339, avremo uno sforzo $\mathcal{H}$ intermedio tra i due che realmente si avrebbero risultare dalla teoria rigorosa matematica quando tutte le forze influissero al flettersi del pezzo.

Però la regola anzidetta bene può ritenersi; nè altra avvertenza dovrà aversi che questa; cioè se la forza agente parallela all'asse del pezzo, il tende si prenda per $\mathcal{H}$ un numero più prossimo al modulo di ultima coesione; se il preme si prenda per $\mathcal{H}$ un numero più lontano dal modulo di resistenza allo schiacciamento.

344. Se il pezzo fosse soggetto insieme a più forze delle quali alcune passassero pel suo asse altre no, cosicchè ne fosse mess'a cimento la resistenza alla torsione; dovrà farsi in vece, come può conchiudersi per analogia,

$$\mathcal{H} = C' + R' + T',$$

ovvero

$$\mathcal{H} = S' + R' + T'$$

ed il numero assunto $\mathcal{H}$ anzi che in due, si scomporrà in tre presso a poco proporzionali alle frazioni dei moduli di resistenza assoluta, rispettiva, e di torsione, che si adotterebbero se la resistenza fosse semplice, anzi che composta da esse tre medesime resistenze.

ARTICOLO II.

Si riepilogano le cose esposte, e si applicano ad un esempio.

343. Da ciò che abbiain detto nell' articolo precedente intorno alla resistenza composta, ed al modo di considerarla anche dai più accurati costruttori, lo che implica una ipotesi che abbiain veduto a che ordinariamente equivale (343), si deducono le seguenti *definizioni e principii pratici fondamentali*.

Definizioni.

1. *Resistenza composta* è quella che un pezzo prismatico rettilineo oppone ad una o più forze che giacenti in un medesimo piano agiscono sul pezzo incontrandone l'asse con direzione obliqua; oppure alcune con direzione con esso coincidente, ed altre con direzioni ad esso perpendicolari.

2. Se tra le forze ve ne siano delle normali all'asse, ma che non l'incontrano, la resistenza pur dicesi composta, ma di *torsione*.

Principii.

1. Per determinare le dimensioni di un pezzo prismatico rettilineo, di cui si mette a cimento la resistenza composta, o per determinare le forze che debbono agirvi sù, perchè non perda di sua elasticità, si facciano le cose seguenti:

1.° si scomponga ciascuna forza agente sul pezzo in due altre, l'una parallela all'asse del pezzo, l'altra ad esso normale:

2.° si consideri il pezzo, come soggetto alle sole componenti secondo il suo asse, e si stabilisca una prima equazione per la resistenza assoluta:

3.° si consideri il pezzo medesimo, come soggetto alle sole componenti normali all'asse, e si stabilisca una seconda equazione per la resistenza rispettiva:

4.° si prenda un numero alquanto più grande della fra-

zione adottabile, del modulo di ultima coesione se le forze secondo l'asse del pezzo il tendono, od alquanto minore della frazione adottabile del modulo di resistenza allo schiacciamento, se il premono; e scompongasi in due altri che abbiano presso a poco il rapporto medesimo delle frazioni dei moduli di resistenza assoluta e rispettiva, che si adotterebbero se si trattasse di resistenza semplice; ed il numero proporzionale al modulo di resistenza assoluta si ponga nella prima detta equazione, l'altro proporzionale al modulo di resistenza rispettiva si ponga nella seconda:

5.° le due equazioni così ottenute si trattino simultaneamente.

2. Se la resistenza composta è di torsione, si stabiliranno tante equazioni per le resistenze semplici per quante sono le resistenze semplici componenti; ed il numero assunto per il più grande sforzo cui conviene assoggettare le fibre del pezzo le più tese o le più compresse, si scomponga in altrettanti numeri proporzionali ai moduli di esse resistenze semplici; e tali numeri proporzionali si pongano nelle rispettive stabilite equazioni, in vece delle frazioni dei moduli delle rispettive resistenze. Ed esse equazioni si trattino simultaneamente.

ESEMPIO.

346. Vogliasi costruire un tetto, coll'armatura tutta di abete bianco comune, e della tratta di palmi 74; e la spinta orizzontale massima che ciascuna incavallatura farebbe contro i piediritti sottostanti sia valutata di rotoli 34000. Per rendere nullo l'effetto di tale spinta, contro i sottoposti piediritti, l'incavallatura si voglia fornire di piana o catena di simile legname.

Si dimanda di quale riquadratura debba essere la piana, o catena lunga pal. 74, per frenare la spinta di 34000 rotoli, e perchè resista al suo proprio peso, che ne mette a cimento la resistenza rispettiva?

Teor. delle Res.

347. Qui le forze che agiscono sulla piana sono (a causa della sua grande tratta) il proprio peso ; e la spinta orizzontale di 34000 rotoli. Il proprio peso è normale all'asse della piana. La spinta agisce secondo l'asse medesimo.

Dunque la prima parte del 1.^o principio , al quale si riferisce il presente esempio , è come già fatta ; non agendo sul pezzo forze oblique.

Passiamo quindi alla seconda parte di essa regola.

348. La spinta tende la piana. Dunque la prima equazione a stabilire debb' essere relativa alla resistenza assoluta positiva. E si riferisce al 2.^o principio (pag. 36) del Capo primo ; onde dovremo far uso della formola

$$F = C'A:$$

e solo dovremo definirvi l'area A della sezione , deducendola dai dati del Problema.

La catena dovendo avere (346) la lunghezza di pal. 74 , e negli ordinarii assortimenti di travi di abete non essendovene di lunghezza maggiore dei pal. 52 , sarà necessario che ciascuna catena si componga di due pezzi : e comunque se ne faccia la *giuntura* , avverrà sempre che in essa si troverà la sezione più debole in quanto alla resistenza assoluta positiva. Però se la giuntura sia ad *ugnatura in terzo* (*fig. 65*), essendo

a = altezza riquadratura

b = larghezza della riquadratura ,

nella formola precedente dovremo fare $A = \frac{1}{3}ab$

Quindi la equazione dipendente dalla seconda parte del 1.^o principio sarà

$$F = \frac{C'ab}{3}.$$

Vediamo qual debba essere la equazione dipendente dalla terza parte del medesimo principio.

349. Quando si considera il solo proprio peso della catena o piana ; è come se , ne sia mess'a cimento la resistenza rispettiva : e perciò potendosi considerare , quando di poco s' incurva , come un pezzo a sezione rettangola posato su due appoggi , dobbiamo aver ricorso alla formola se-

conda del primo caso del principio 42.^o del capo 3.^o (pag. 206).
La quale si è

$$\frac{4R'}{3} \cdot \frac{a^2 b}{c^2} = \Pi;$$

nella quale è qui Π il peso dell'abete per ogni palmo della lunghezza del pezzo. Onde facendo

p = al peso di un'oncia cubica dell'abete ,
sarà

$$\Pi = 10 abp ,$$

Quindi la equazione dipendente dalla terza parte del medesimo detto primo principio , sarà la

$$\frac{4R'}{3} \cdot \frac{a}{c^2} = 10 p.$$

Dobbiamo ora , a termini della quarta parte del principio stesso determinare i numeri da porre in vece di C' ed R' , nelle precedenti due equazioni , nate dalla seconda e terza parte del principio.

350. Quà la spinta orizzontale , che è la forza agente secondo l'asse del pezzo , tendendolo , dovremo , a termini del detto nella 4.^a parte del principio , prendere un numero alquanto più grande della frazione adottabile del modulo di ultima coesione (capo 1.^o prin.^o 2.^o) ed il fisseremo, tenendo in conto l'azione più o meno continuata delle forze sulla piana.

Ora la piana è soggetta all'azione continuata di una spinta orizzontale e del proprio peso. Ma la prima non agisce sempre colla sua massima intensità , potendo il tetto , solo in certi mesi o giorni dell'anno , essere soggetto ad un peso sopraincumbente, come sarebbe quello della neve; laddove il secondo vi agisce continuamente. Dunque , nella tav. a pag. 19 , per l'abete bianco, corrispondendo al valore massimo di C' il numero 1594; ed essendo 1000 il medio tra i limiti massimo e minimo , assumeremo per quello da scomporsi in due , come è detto in essa 4.^a parte del principio , l'altro 1300.

Ma se la piana fosse soggetta alla sola spinta , che ne mette a cimento la resistenza assoluta positiva , per le considerazioni precedenti , prenderemmo , come dalla tav. a pag. 19 , $C' \approx 1200$; e se fosse soggetta al solo proprio

peso che ne mette a cimento la resistenza rispettiva e che vi agisce sù continuamente, prenderemmo, come risulta dalla tav. a pag. 180, $R' = 56$.

Quindi per la quarta parte del principio, avremo le due relazioni

$$1300 = C' + R' \quad , \quad C' : R' :: 1200 : 56$$

Dalle quali caveremo

$$C' = \frac{1200 \cdot 1300}{1256} = 1242 \text{ prossimamente}$$

$$R' = \frac{56 \cdot 1300}{1256} = 58 \text{ prossimamente.}$$

Nella equazione del n.° 348 dunque faremo $C' = 1242$, e nell'altra del n.° 349, $R' = 58$.

351. Le equazioni quindi da trattare simultaneamente, giusta la 5.^a parte del primo principio, sono le due

$$F = \frac{1242 \cdot ab}{3} \quad , \quad \frac{4 \cdot 58}{3} \cdot \frac{a}{c^2} = 10p.$$

Ma nelle quali dovremo porre per F , c , e p i loro valori, essendovi ignote (346) le a e b .

Calcoliamoci dunque la p . La gravità specifica dell'abete bianco essendo 498, assunto 1000 quella dell'acqua; ed un palmo cubico di acqua pesando rotola 20,736; sarà

$$10 \cdot p = \frac{(0,498)(20,736)}{100} = 0,103 \quad , \quad \text{prossimamente:}$$

Quindi le due equazioni precedenti, postovi per F li 34000 rotoli e per c li palmi 74, e per $10p$ il valore di sopra, diventeranno

$$34000 = \frac{1242 \cdot ab}{3} \quad , \quad \frac{4(58)}{3} \cdot \frac{a}{(74)^2} = 0,103$$

ossia,

$$34000 = 414 \cdot ab \quad , \quad 232 \cdot a = 1692.$$

352. La seconda dà $a = \text{once } 7,30$, prossimamente. E quindi la prima $b = \text{once } 11,25$, prossimamente.

Dai quali risultamenti impariamo che

1.° purchè la piana abbia altezza non minore di once 7,30 ben reggerà il suo proprio peso, che ne mette a cimento la resistenza rispettiva:

2.° la sua sezione, sicuramente resisterà alla spinta dei 34000 rotoli che ne mette a cimento la sua resistenza assoluta positiva, quando la sezione ne sia di 28 once quadrate numero prossimamente superiore al prodotto delle due trovate dimensioni 11,25, e $\frac{7,30}{3}$.

Dunque sulle considerazioni che

1.° pel 31.° principio generale del capo 3.° tra i pezzi a sezioni rettangole sono da preferirsi quelli che sono più alti che larghi;

2.° tanto possono venire migliori le giunture ad *ugnatura* per quanto più sono alti i pezzi da congiungersi, e che d'altronde la piana di un tetto non può essere molto stretta, senza di che non può convenientemente commettersi ai *puntoni*;

potremo, a soprabbondare in cautela, fare la piana di altezza once 12, e di larghezza once 7.

Questo è il risultato teorico. Dobbiamo vedere ora *come farlo rispondere colla economia*; la quale si ottiene, quando vi sia il minimo sciupo di legname.

353. Consideriamo che se la tratta della catena tra i *puntoni* deve avere la lunghezza di palmi 74, di cui la metà è 37, non potrà essa essere solidamente armata, se ciascun pezzo non abbia circa palmi 45 o 46 di lunghezza, onde li 8 o 9 palmi di più possano servire per le tenute, incastri, e giunture. E che però potranno prendersi per la catena di che si tratta le travi di abete di palmi 46, che trovansi in commercio. Ma tali travi sono a sezioni quadrate di once 20 di lato. Dunque sarà opportuno per la economia, di modificare le dimensioni della catena, e perciò farla in vece alta once 13,3 larga once 6,6 come risulterà segnando ciascuna trave, come è indicato nella *fig. 66*; cavandosi così da ciascuna trave quattro pezzi inservienti alle catene; ed uno a sezione quadrata, da potere pure servire per altre parti del tetto medesimo. E così facendo, la catena risulta anche più resistente.

354. Conchiuderemo, dunque in fine, la piana del tetto

della tratta di palmi 74, da elidere a sue spese la spinta orizzontale di 34000 rotoli, si farà colla riquadratura di once 43,3 in altezza, per once 6,6 in larghezza. E si comporrà di due pezzi; e le ugnature si faranno in terzo; e le tacche nelle tenute potranno farsi anche più che a mezza grossezza.

355. Se vogliasi determinare il ventre di curvatura della piana considerandola come sostenente soltanto il suo proprio peso, avremo ricorso alla seconda formola del primo caso del 14.º principio del capo 3.º, la quale è

$$h_1 = \frac{5}{32} \cdot \frac{\Pi c^4}{E a^3 b}$$

che nel caso attuale, essendo (349) la $\Pi = 10abp$, darà luogo all'altra

$$h_1 = \frac{5}{32} \cdot \frac{10pc^4}{E a^2}$$

E qui fatto, secondo abbiamo trovato (351, 354),
 $10p = 0,103$ rotoli; e

$c = 74$ palmi

$a = 13,3$ once

$E = 438$ rotoli, come vien dato dalla tavola a pag. 176; risulta

$$h_1 = \frac{5(0,103)(74)^4}{32(438)(13,3)^2} = \frac{15443086,64}{2479290,24} = 6,229.$$

Dunque il ventre della piana sarebbe poco più di once sei; cioè i $\frac{6,229}{14,333}$ della distanza degli appoggi, onde la sua elasticità non potrà per nulla alterarsi.

356. Comunque questa freccia sia assai inferiore a quella per la quale l'abete non perde punto di elasticità (219); pure a causa dell'unione dei due pezzi di che deve comporsi, e per altri riguardi da aversi alla costruzione, sarà bene fornirla di una *staffa* attaccata al *monaco* o *colonnello*, che la sostenga nel mezzo, come vedesi nella figura 67. Parimente, come si suole sempre fare, sarà bene ligare la piana coi puntoni anche con briglia perchè non vada riportata la spinta tutta sulla sola resistenza di aderenza dell'abete.



SBN

011100



OPERE EDITE

UI

VINCENZO ANTONIO ROSSI.



1. Considerazioni intorno ad una tuferriata riguardata come superficie, ovvero la Conoidale di Wallis e le sue sezioni piane — Napoli 1835 in 8.^o di pag. XIX e 653, ed un atlante in folio di tav. 16.
2. Delle Lezioni sulle Costruzioni e sull'Arte di Progettare, date alla Scuola di Applicazione di Ponti e Strade. Rapporto al Direttore Generale — Napoli 1837.
3. Manuale per la misura delle fabbriche, 2.^a edizione — Napoli 1842 in 8.^o di pag. 424, con 12 tav. in rame.
4. Di una Navigazione Mediterranea in Capitanata tra Foggia e Manfredonia, e della irrigazione di quelli terreni — Napoli 1843, in 4.^o di pag. 35, con una tav. in rame. Memoria estratta dal Vol. IV. degli Atti Pontaniani.
5. Memoria (Idraulica - economia) per un Piano di Lavori pel Diffinitivo Boniframento della Campagna Vicana — Napoli 1843, in 4.^o di pag. 207 con tre tavole topografiche, e varie Note importanti.
6. Per una superficie, secondo la quale potrebbero conformare le estremità inferiori dei Moli sporgenti in Mare. — Articolo di architettura marittima, inserito nel Vol. I.^o del Museo — Napoli 1843.
7. Generalità Geometriche sulle Superficie Anulari — Napoli 1844, in 8.^o di pag. 32.
8. Di una Efficacissima pratica per istabilire la sussistenza dello sbocco dei fiumi in mare. Opuscolo Idraulico — Napoli 1845 in 4.^o di pag. 17.
9. Proposta per l'avanzamento della Scienza Idraulica, e delle applicazioni sue ai grandi bisogni Sociali — Napoli 1845. Articolo inserito nel Vol. VII. del Museo.
10. Ricerche Analitiche sulle Superficie Anulari — Napoli 1845; in 8.^o di pag. 98: comprende quelle sulle Anulari di 1.^a, e 2.^a Classe.
11. Principali risultamenti di un'analisi (inviata all'I. R. Istituto Lombardo) sulle Variazioni di accrescimento di altezza delle acque di un lago diviso in due, rispetto a quello di un lago indiviso — Art. idraulico inserito nel Vol. VIII. del Museo. — Napoli 1846.
12. Intorno ad una Superficie Anulare, secondo la quale potrebbero conformare le estremità dei moli sporgenti in mare. Memoria estratta dal Vol. V. degli Atti Pontaniani; e comprende una nuova Teoria di Geometria Descrittiva: in 4.^o di pag. VIII e 100, con IX tavole in rame — Napoli 1847.

13. Sommario di una memoria sulle Superficie Anulari a Cono Direttore — Napoli 1849, in 8.^o di pag. 69.
14. Nota sul soggetto dei Fusari di Terra di Lavoro nel Regno di Napoli. Inserita nei Rendiconti della Reale Accademia dei Georfilli — Firenze 1831.
15. Sulla costruzione di un Ponte in Isblego ad angolo minore di 27.^o — Lettera inserita nell'anno 1.^o (1830) degli Annali delle Opere Pubbliche — Napoli.
16. Se possano oppur no derivarsi le acque di un fiume torbido — Nota idraulica, estratta dal Vol. V. degli Atti della Gioenia — Catania 1830.
17. Ricerche Analitiche sulle superficie Anulari di Quinta, Sesta, e Settima Classe — Memoria estratta dal Vol. VI degli Atti Pontaniani — Napoli 1831, in 4.^o di pag. 225.
18. Sulla sistemazione finale delle Acque di Valdichiana Toscana; e sulla immissione in Arno delle acque sue e delle sue convalli. — Ragionamento Idraulico — con Note; e riscontri del Commendatore Mannetti — Presentato all' Accademia dei Georfilli, e pubblicata anche negli annali delle Opere Pubbliche pel 1833 — Napoli.
19. Principii fondamentali della Teoria delle Resistenze dei materiali. — Napoli 1833, in 8.^o di pag. XII., e 286.















